Compacité

Valeurs d'adhérences d'une suite

Exercice 1 [02946] [Correction]
Soit a une suite de réels telle que $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a est un intervalle.

Exercice 2 [01162] [Correction]
Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que si une suite (u_n) d'éléments de K n'a qu'une seule valeur d'adhérence alors cette suite converge vers celle-ci.

Exercice 3 [01163] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \to 0$.
Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n) alors $-2a$ l'est aussi.
En déduire que (u_n) converge.

Exercice 4 [02947] [Correction]
Déterminer les suites réelles bornées telle que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)_{n\geq 0}$ converge.

Partie compacte

Exercice 5 [01160] [Correction]
Montrer que toute partie fermée d'une partie compacte est elle-même compacte.

Exercice 6 [01164] [Correction]
Soient K et L deux compacts d'un espace vectoriel normé E.
Établir que $K + L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$ est un compact de E.

Exercice 7 [01171] [Correction]
Soient E et F deux espaces normés, A une partie fermée de E et B une partie compacte de F.
Soit $f : A \to B$ une application vérifiant :

— $f^{-1}(\{y\})$ est compact pour tout $y \in B$;
— l'image de tout fermé de A est un fermé de B.

Montrer que A est compact.

Exercice 8 [02778] [Correction]
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

(a) Montrer
$$\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|x - y\|$$

(b) Montrer, si $F \neq E$, qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.

(c) Montrer que E est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité fermée $B = \left\{x \in E \;\middle|\; \|x\| \leq 1\right\}$ est une partie compacte.

Exercice 9 [04165] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs.
Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ choisis dans $\mathbb{R}^n$, on écrit $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout indice i.

(a) Écrire un programme **Python** qui renvoie la valeur propre de module maximal d'une matrice passée en argument.

(b) Tester ce programme pour dix matrices carrées à coefficients pris aléatoirement dans $[1\,;2[$.

Soit
$$S = \left\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 0 \leq x \text{ et } \lambda x \leq Ax\right\}$$

(c) Soit $\lambda \in S$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$0 \leq x, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda x \leq Ax$$

(d) Soit λ une valeur propre complexe. Montrer que $|\lambda| \in S$.

(e) Montrer que la partie S est majorée et expliciter un majorant.

(f) Montrer que S est une partie compacte.

(g) Soit $\alpha = \max S$. Montrer que α est une valeur propre de A strictement positive associée à un vecteur propre strictement positif.

Exercice 10 [04950] [Correction]
Soit K une partie compacte d'un espace normé E et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E recouvrant le compact K, c'est-à-dire vérifiant

$$K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$$

(a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, il existe au moins un indice $i \in I$ tel que la boule $B(x, \alpha)$ soit incluse dans Ω_i.

(b) Établir qu'il existe une famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ constituée d'éléments de K telle que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \alpha)$$

(c) Conclure que l'on peut extraire de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ une sous-famille finie recouvrant K.

Compacité et continuité

Exercice 11 [01175] [Correction]
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

(a) Soit A une partie non vide de E. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E.

(b) Soit K un compact non vide inclus dans un ouvert U.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in K, B(x, \alpha) \subset U$$

Exercice 12 [04089] [Correction]
Soientt K un compact non vide d'un espace normé E et $f : K \to K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2,\ x \neq y \implies \left\|f(x) - f(y)\right\| < \left\|x - y\right\|$$

(a) Montrer que f possède au plus un point fixe.

(b) Justifier qu'il existe $c \in K$ tel que

$$\forall x \in K, \left\|f(x) - x\right\| \geq \left\|f(c) - c\right\|$$

(c) En déduire que f admet un point fixe.

Exercice 13 [01176] [Correction]
Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
On considère une application $f : K \to K$ vérifiant

$$\forall x, y \in K, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 14 [03410] [Correction]
Soient f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I un segment inclus dans l'image de f.
Montrer qu'il existe un segment J tel que

$$f(J) = I$$

Exercice 15 [03857] [Correction]
Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
On considère $f : K \to K$ une application ρ-lipschitzienne *i.e.* vérifiant

$$\forall x, y \in K, \|f(y) - f(x)\| \leq \rho \|y - x\|$$

(a) On suppose $\rho < 1$. Montrer que f admet un point fixe.

(b) On suppose $\rho = 1$ et K convexe. Montrer à nouveau que f admet un point fixe. On pourra introduire, pour $a \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$f_n : x \mapsto \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} f(x)$$

Exercice 16 [01173] [Correction]
Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies.
Soient K un compact de E et $f : K \to F$ une application continue injective.

(a) On pose $L = f(K)$. Montrer que L est compact.

(b) Montrer que $f^{-1} : L \to K$ est continue.

Exercice 17 [04074] [Correction]
Soit f une fonction numérique continue sur $[0\,; +\infty[$ telle que f ait une limite finie ℓ en $+\infty$.
Démontrer que f est uniformément continue sur $[0\,; +\infty[$.

Exercice 18 [04103] [Correction]
E désigne un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E.

(a) Soit $x \in E$ et $r > 0$. Justifier que la boule $B_f(x,r)$ est compacte. Que dire de $f(B_f(x,r))$?

(b) Soit $x \in E$ et un réel r tel que $0 < r < \|x\|$. On note $K = B_f(x,r)$ et on suppose $f(K) \subset K$.
On fixe $a \in K$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)$$

Justifier que $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de K et que $f(y_n) - y_n$ tend vers 0_E. En déduire qu'il existe un vecteur $w \in K$ tel que $f(w) = w$.

(c) On reprend les notations précédentes et on suppose toujours $f(K) \subset K$. Montrer que $1 \in \operatorname{Sp} f$ et $\operatorname{Sp} f \subset [-1;1]$.

(d) À l'aide d'un exemple choisi en dimension 3, montrer que f n'est pas nécessairement diagonalisable.

(e) Dans cette dernière question, on choisit $\dim E = 3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base orthonormée de E et

$$K = \left\{x.e_1 + y.e_2 + z.e_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\} \text{ (avec } a, b, c > 0)$$

On suppose $f(K) = K$. Montrer que 1 ou -1 est valeur propre de f.

Raisonnement de compacité

Exercice 19 [01166] [Correction]
Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E tel que $0 \notin K$.
On forme $F = \{\lambda.x \mid \lambda \in \mathbb{R}_+, x \in K\}$. Montrer que F est une partie fermée.

Exercice 20 [01167] [Correction]
Soient K et L deux compacts disjoints d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Montrer que $d(K, L) > 0$.

Exercice 21 [01174] [Correction]
Soient K et L deux compacts non vides et disjoints. Montrer

$$d(K, L) = \inf_{x \in K, y \in L} \|y - x\| > 0$$

Exercice 22 [01168] [Correction]
Soit F une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E.

(a) Montrer que, pour tout $x \in E$, la distance de x à F est atteinte en un certain élément $y_0 \in F$.

(b) Y a-t-il unicité de cet élément y_0 ?

Exercice 23 [02772] [Correction]
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

son graphe.

(a) On suppose f continue. Montrer que Γ_f est fermé.

(b) On suppose f bornée et Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.

(c) Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f bornée ?

Exercice 24 [03274] [Correction]
Soit A une partie bornée non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E.

(a) Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A.

(b) On suppose l'espace E euclidien, montrer l'unicité de la boule précédente.

Exercice 25 [03305] [Correction]

(a) Soit F une partie fermée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. L'ensemble $F' = \bigcup_{x\in F} \overline{B(x,1)}$ est-il fermé ?

(b) Qu'en est-il si on ne suppose plus l'espace E de dimension finie ?

Exercice 26 [02776] [Correction]
Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés réels, f une application de E_1 dans E_2 telle que pour tout compact K de E_2, $f^{-1}(K)$ soit un compact de E_1. Montrer, si F est un fermé de E_1, que $f(F)$ est un fermé de E_2.

Exercice 27 [01179] [Correction]
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E.

(a) On suppose E de dimension finie. Montrer que $\bar{F} = F$.

(b) On ne suppose plus E de dimension finie, montrer qu'il est possible que $\bar{F} \neq F$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite a.
Nous allons établir que A est un intervalle en observant que

$$\forall \alpha < \beta \in A, [\alpha\,;\beta] \subset A$$

(caractérisation usuelle des intervalles)
Soit $\alpha < \beta \in A$ et $\gamma \in [\alpha\,;\beta]$. Si $\gamma = \alpha$ ou $\gamma = \beta$ alors évidemment $\gamma \in A$.
Supposons maintenant $\gamma \in \,]\alpha\,;\beta[$.
Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $a_{n+1} - a_n \to 0$, il existe un rang N' tel que

$$\forall n \geq N', |a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon$$

Comme α est valeur d'adhérence de a et que $\alpha < \gamma$ il existe $p \geq \max(N, N')$ tel que $a_p < \gamma$. Aussi, il existe $q \geq \max(N, N')$ tel que $a_q > \gamma$.
Si $p < q$, on introduit

$$E = \{n \in [\![p\,;q]\!], a_n < \gamma\}$$

Cet ensemble E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car$p \in E$) et majoré (par$q$). Cet ensemble admet donc un plus grand élément r. Nécessairement $r < q$ car $a_q \geq \gamma$.
Puisque $r \in E$ et $r + 1 \notin E$, $a_r < \gamma \leq a_{r+1}$ et donc $|\gamma - a_r| \leq |a_{r+1} - a_r| \leq \varepsilon$.
Si $p > q$, un raisonnement semblable conduit à la même conclusion.
Finalement

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists r \geq N, |\gamma - a_r| \leq \varepsilon$$

On peut donc affirmer que γ est valeur d'adhérence de a et conclure.

Exercice 2 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite d'éléments de K qui n'ait qu'une seule valeur d'adhérence ℓ.
Par l'absurde supposons que (u_n) ne converge par vers ℓ. On peut écrire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Par conséquent il existe une infinité de termes de cette suite tels que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
À partir de ces termes on peut construire une suite extraite de (u_n) qui étant une suite d'éléments du compact K possèdera une valeur d'adhérence qui ne peut être que ℓ compte tenu de l'hypothèse.
C'est absurde, car tous ces termes vérifient $|u_n - \ell| > \varepsilon$.

Exercice 3 : [énoncé]
Posons

$$\varepsilon_n = u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \to 0$$

Si $u_{\varphi(n)} \to a$ alors $u_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2u_{\varphi(n)} \to -2a$. Ainsi

$$a \in \mathrm{Adh}(u) \implies -2a \in \mathrm{Adh}(u)$$

Si (u_n) possède une valeur d'adhérence a autre que 0 alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-2)^k a$ est aussi valeur d'adhérence. Or ceci est impossible car (u_n) est bornée.
Puisque (u_n) est bornée et que 0 est sa seule valeur d'adhérence possible, $u_n \to 0$.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{2}{3}\ell$ de sorte que $\varepsilon_n = v_n + \frac{v_{2n}}{2} \to 0$.
Soit a une valeur d'adhérence de la suite (v_n).
Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_{\varphi(n)} \to a$.

$$v_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2v_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2a$$

donc $-2a$ est aussi valeur d'adhérence de (v_n).
En reprenant ce processus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(-2)^p a$ est valeur d'adhérence de (v_n).
Or la suite (u_n) est bornée, la suite (v_n) l'est donc aussi et ses valeurs d'adhérence le sont encore. On peut donc affirmer $a = 0$.
La suite (v_n) est bornée et 0 est sa seule valeur d'adhérence donc elle converge vers 0 (car si tel n'était pas le cas, il existerait une infinité de termes de la suite (v_n) en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon\,;\varepsilon], \varepsilon > 0$, et de ces termes bornés on pourrait extraire une suite convergente d'où l'existence d'une valeur d'adhérence non nulle).

Exercice 5 : [énoncé]
Soit F une partie fermée d'un compact K. Si (x_n) est une suite d'éléments de F, alors c'est aussi une suite d'éléments de K et on peut donc en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans K. Cette suite extraite est aussi une suite convergente d'éléments du fermé F, sa limite appartient donc à F. Au final, il existe une suite extraire de (x_n) convergeant dans F.

Exercice 6 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite d'éléments de $K + L$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in K$ et $b_n \in L$. On peut extraire de la suite (a_n) d'éléments du compact K, une suite $(a_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément de K. On peut aussi

extraire de la suite $(b_{\varphi(n)})$ d'éléments du compact L, une suite $(b_{\varphi(\psi(n))})$ convergeant vers un élément de L. Pour l'extractrice $\theta = \varphi \circ \psi$, $(a_{\theta(n)})$ et $(b_{\theta(n)})$ convergent vers des éléments de K et L donc $(u_{\theta(n)})$ converge vers un élément de $K + L$.
Autre démonstration $K + L$ est l'image du compact $K \times L$ de E^2 par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$.

Exercice 7 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite d'éléments de A. On va établir que cette suite possède une valeur d'adhérence dans A.
On pose $F_n = \overline{\{u_p \mid p \geq n\}}$. La suite (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides. Posons $G_n = f(F_n)$. La suite (G_n) est une suite décroissante de fermés non vides. On peut considérer $y_n \in G_n$. La suite (y_n) possède une valeur d'adhérence y car B est compact. Pour tout $p \geq n$, on a $y_p \in G_p \subset G_n$ donc $y \in G_n$. Par suite, il existe $t_n \in F_n$ tel que $y = f(t_n)$. La suite (t_n) est une suite du compact $f^{-1}\{y\}$, elle possède donc une valeur d'adhérence t. Pour tout $p \geq n$, $t_p \in F_p \subset F_n$ donc $t \in F_n$.
Ainsi, t est une valeur d'adhérence de (u_n).

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Par définition
$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le réel $d(x, F) + 1/(n + 1)$ ne minore par l'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ et donc il existe $y_n \in F$ tel que
$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n + 1}$$
En faisant varier n, cela détermine une suite (y_n) d'éléments de F vérifiant
$$\|x - y_n\| \to d(x, F)$$
Cette suite est bornée et évolue dans l'espace vectoriel normé F qui est de dimension finie, elle admet donc une valeur d'adhérence y dans F pour laquelle on obtient
$$d(x, F) = \|x - y\|$$

(b) Puisque $F \neq E$, il existe un vecteur x de E n'appartenant pas à F. On vérifie aisément
$$d(\lambda x, F) = |\lambda|\, d(x, F)$$
car pour $\lambda \neq 0$
$$\{\|\lambda x - y\| \mid y \in F\} = \{\|\lambda(x - y')\| \mid y' \in F\}$$
Il est donc possible de choisir x vérifiant $d(x, F) = 1$.
Pour tout vecteur $y \in F$, on a aussi $d(x - y, F) = 1$ car
$$\{\|x - z\| \mid z \in F\} = \{\|x - y - z'\| \mid z' \in F\}$$
Il ne reste plus qu'à trouver $y \in F$ tel que $\|x - y\| = 1$. Le vecteur $y \in F$ vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$ convient. Le vecteur $u = x - y$ est alors solution.

(c) Si E est de dimension finie, la boule B est compacte car fermée et bornée en dimension finie.
Inversement, supposons par l'absurde que B est compacte et E de dimension infinie. Par récurrence, on construit une suite (u_n) de vecteurs de E en posant u_0 un vecteur unitaire quelconque, puis une fois $u_0, \ldots, u_n$ déterminés, on définit u_{n+1} de sorte que
$$d(u_{n+1}, \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_n)) = \|u_{n+1}\| = 1$$
Cette construction est possible par l'étude qui précède car E est supposé de dimension infinie.
La suite (u_n) ainsi définie est une suite d'éléments du compact B, on peut donc en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(n)})$. Puisque cette suite converge
$$\left\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right\| \to 0$$
or
$$\left\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right\| \geq d(u_{\varphi(n+1)}, \mathrm{Vect}(u_0, \ldots, u_{\varphi(n+1)-1})) \geq 1$$
C'est absurde.

Exercice 9 : [énoncé]

(a)
```
import numpy as np
import numpy.linalg

def eigmax(A):
    eig = numpy.linalg.eigvals(A)
    maxi = eig[0]
    for e in eig:
        if abs(e) > abs(maxi): maxi = e
    return maxi
```

(b)
```
import random as rnd

def generematrice(n):
    A = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i,j] = 1 + rnd.random()
    return A

for t in range(10):
    print(eigmax(generematrice(3)))
```

(c) Soit $\lambda \in S$. Il existe x non nul à coefficients positifs tel que $\lambda x \leq Ax$. En divisant x par la somme de ses coefficients (qui est un réel strictement positif), on détermine un nouveau vecteur comme voulu.

(d) Soit λ une valeur propre complexe et $z = (z_1, \ldots, z_n)$ le vecteur propre associé. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\lambda z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$$

et donc

$$|\lambda|\,|z_i| \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\geq 0} |z_j|$$

Le vecteur $x = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$, est un vecteur réel non nul vérifiant $0 \leq x$ et $|\lambda|\, x \leq Ax$. On en déduit $|\lambda| \in S$.

(e) Soit $\lambda \in S$ et $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $0 \leq x$ et $\lambda x \leq Ax$. Considérons i l'indice tel que x_i soit maximal parmi $x_1, \ldots, x_n$. On a

$$\lambda x_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i$$

En simplifiant par x_i (qui est strictement positif car $0 \leq x$ et x non nul), il vient

$$\lambda \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

On en déduit que la partie S est majorée par le réel

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

(f) La partie S est bornée dans un espace de dimension finie, il suffit d'établir qu'elle est fermée pour pouvoir affirmer qu'elle est compacte.
Soit (λ_p) une suite d'éléments de S de limite λ_∞. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut introduire $x_p \in \mathbb{R}^n$ à coefficients positifs de somme égale à 1 et vérifiant $\lambda_p x_p \leq A x_p$. La suite (x_p) évolue dans le compact

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; 0 \leq x \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(q)})$ de limite $x_\infty \in K$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\lambda_{\varphi(q)} x_{\varphi(q)} \leq A x_{\varphi(q)}$ ce qui donne à la limite $\lambda_\infty x_\infty \leq A x_\infty$. On peut donc affirmer que λ_∞ est élément de S. La partie S contient les limites de ses suites convergentes, elle est donc fermée et finalement compacte.

(g) La compacité de S permet d'introduire son élément maximal α. Soit aussi $x \in K$ tel que $\alpha x \leq Ax$. Si $\alpha x \neq Ax$, le vecteur $y = Ax - \alpha x$ est à coefficients positifs et n'est pas nul. La matrice A étant à coefficients strictement positifs, Ay est à coefficients strictement positifs. Considérons ensuite $z = Ax$. Le vecteur z est à coefficients strictement positifs car les coefficients de A sont strictement positifs et les coefficients de x sont positifs et non tous nuls. Quitte à considérer $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut écrire $\varepsilon z \leq Ay$. Cette comparaison se réorganise pour permettre d'écrire

$$(\alpha + \varepsilon) z = Az$$

ce qui contredit la définition de α. On en déduit $\alpha x = Ax$ et, comme souligné au-dessus, $z = Ax$ est un vecteur à coefficients strictement positifs ce qui entraine $\alpha > 0$ et x à coefficients strictement positifs.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) Par l'absurde supposons qu'un tel $\alpha > 0$ n'existe pas. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en considérant $\alpha_n = 1/(n+1) > 0$, il existe un élément $x_n \in K$ tel que

$$B(x_n, \alpha_n) \not\subset \Omega_i \quad \text{pour tout } i \in I \tag{1}$$

En faisant varier n, ceci détermine une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments du compact K. On peut extraire de cette suite une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément x de K. La famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ recouvrant K, il existe au moins un indice $i \in I$ tel que x est élément de Ω_i. Or Ω_i est une partie ouverte, on peut donc introduire $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset \Omega_i$. Cependant, pour n assez grand, on a à la fois

$$\left\| x_{\varphi(n)} - x \right\| \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{\varphi(n)} \leq \frac{\alpha}{2}$$

de sorte que

$$B(x_{\varphi(n)}, \alpha_{\varphi(n)}) \subset B(x, \alpha) \subset \Omega_i$$

C'est absurde puisque cela contredit (**??**).

(b) Par l'absurde supposons qu'une telle famille finie n'existe pas et construisons par récurrence une suite (x_n) d'éléments de K en choisissant arbitrairement x_0 dans K puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en choisissant x_{n+1} dans K privé de la réunion des $B(x_i, \alpha)$ pour i allant de 0 à n (l'hypothèse absurde assure que ce choix est possible).

Par compacité de K, on peut extraire de la suite (x_n) une suite convergente. En notant x sa limite, on peut déterminer dans (x_n) des termes arbitrairement proches de x. En particulier, on peut trouver x_n et x_{n+p} avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\|x_n - x\| < \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \|x_{n+p} - x\| < \frac{\alpha}{2}$$

Ceci entraîne $\|x_{n+p} - x_n\| < \alpha$ et donc x_{n+p} est élément de la boule de centre x_n et de rayon α. Ceci est absurde car contredit le protocole suivi pour choisir x_{n+p}.

(c) Partant de la suite finie $(x_1, \dots, x_n)$ qu'on peut introduire grâce à la question précédente, on introduit des indices $i_1, \dots, i_n \in I$ déterminés de sorte que

$$B(x_j, \alpha) \subset \Omega_{i_j} \quad \text{pour tout } j \in [\![1\,; n]\!]$$

On a alors

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \alpha) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_{i_j}$$

et ainsi on peut conclure que le compact K peut être recouvert par une sous-famille finie de la famille d'ouverts $(\Omega_i)_{i \in I}$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Soient $x, x' \in E$.

$$\forall y \in A, \|x - y\| \le \|x - x'\| + \|x' - y\|$$

donc $d(x, A) \le \|x - x'\| + \|x' - y\|$ puis $d(x, A) - \|x - x'\| \le \|x' - y\|$ et $d(x, A) - \|x - x'\| \le d(x', A)$.
Ainsi $d(x, A) - d(x', A) \le \|x - x'\|$ et par symétrie $|d(x, A) - d(x', A)| \le \|x - x'\|$.
Finalement $x \mapsto d(x, A)$ est 1 lipschitzienne donc continue.

(b) Considérons l'application $x \mapsto d(x, \mathcal{C}_E U)$ définie sur le compact K.
Cette application est bornée et atteint ses bornes. Posons $\alpha = \min_{x \in K} d(x, \mathcal{C}_E U)$ atteint en $x_0 \in K$.
Si $\alpha = 0$ alors $x_0 \in \overline{\mathcal{C}_E U}$ or $\mathcal{C}_E U$ est fermé et donc $x_0 \notin U$ or $x_0 \in K$.
Nécessairement $\alpha > 0$ et alors

$$\forall x \in K, B(x, \alpha) \subset U$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Supposons que f possède deux points fixes $x \neq y$.
L'hypothèse de travail donne

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

ce qui est absurde si $f(x) = x$ et $f(y) = y$.

(b) On introduit la fonction $\delta\colon x \mapsto \|f(x) - x\|$ définie sur K.
La fonction δ est continue sur le compact K, elle admet donc un minimum en un $c \in K$ et alors

$$\forall x \in K, \delta(x) \ge \delta(c)$$

(c) Par l'absurde, si $f(c) \neq c$ alors

$$\delta(f(c)) = \|f(f(c)) - f(c)\| < \|f(c) - c\| = \delta(c)$$

ce qui contredit la minimalité de c. Il reste $f(c) = c$ ce qui fournit un point fixe.

Exercice 13 : [énoncé]

Unicité : Si $x \neq y$ sont deux points fixes distincts on a

$$d(x, y) = d(f(x), f(y) < d(x, y)$$

C'est exclu et il y a donc unicité du point fixe.
Existence : Considérons la fonction réelle $g\colon x \mapsto d(x, f(x))$ définie sur K. Par composition g est continue et puisque K est une partie compacte non vide, g atteint son minimum en un certain $x_0 \in K$.
Si $f(x_0) \neq x_0$ on a alors

$$g(f(x_0)) = d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0) = g(x_0)$$

ce qui contredit la définition de x_0. Nécessairement $f(x_0) = x_0$ ce qui résout le problème.

Exercice 14 : [énoncé]
Notons α, β les extrémités de I.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des antécédents de α, β respectivement. Malheureusement, on ne peut pas déjà affirmer $f([a\,;b]) = [\alpha\,;\beta]$ car les variations de f sur $[a\,;b]$ sont inconnues.
Posons
$$A = \{x \in [a\,;b] \mid f(x) = \alpha\} \text{ et } B = \{x \in [a\,;b] \mid f(x) = \beta\}$$
Considérons ensuite
$$\Delta = \{|y - x| \mid x \in A, y \in B\}$$
Δ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. On peut donc introduire sa borne inférieure m. Par la caractérisation séquentielle des bornes inférieures, il existe deux suites $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in B^{\mathbb{N}}$ vérifiant
$$|y_n - x_n| \to m$$
La partie A étant fermée et bornée, on peut extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans A. De la suite $(y_{\varphi(n)})$, on peut aussi extraire une suite convergeant dans B et en notant x_∞ et y_∞ les limites de ces deux suites, on obtient deux éléments vérifiant
$$x_\infty \in A, y_\infty \in B \text{ et } |y_\infty - x_\infty| = \min \Delta$$
Autrement dit, on a définit des antécédents des extrémités de I dans $[a\,;b]$ les plus proches possibles.
Pour fixer les idées, supposons $x_\infty \leq y_\infty$ et considérons $J = [x_\infty\,;y_\infty]$.
On a $\alpha, \beta \in f(J)$ et $f(J)$ intervalle (car image continue d'un intervalle) donc
$$I \subset f(J)$$
Soit $\gamma \in f(J)$. Il existe $c \in J$ tel que $f(c) = \gamma$.
Si $\gamma < \alpha$ alors en appliquant le théorème de valeurs intermédiaires sur $[z\,;y_\infty]$, on peut déterminer un élément de A plus proche de y_∞ que ne l'est x_∞. Ceci contredit la définition de ces deux éléments.
De même $\gamma > \beta$ est impossible et donc $f(J) \subset I$ puis l'égalité.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) La fonction f est continue car lipschitzienne. Considérons $g\colon x \in K \mapsto \|f(x) - x\|$. La fonction g est réelle, continue et définie sur un compact non vide, elle admet donc un minimum en un certain $x_0 \in K$.
Puisque
$$g(x_0) \leq g(f(x_0)) = \|f(f(x_0)) - f(x_0)\| \leq \rho \|f(x_0) - x_0\| = \rho g(x_0) \text{ avec } \rho < 1$$
On a nécessairement $g(x_0) = 0$ et donc $f(x_0) = x_0$ ce qui fournit un point fixe pour f.

(b) Par la convexité de K, on peut affirmer que f_n est une application de K vers K.
De plus
$$\|f_n(y) - f_n(x)\| = \frac{n-1}{n} \|f(y) - f(x)\| \leq \rho_n \|y - x\|$$
avec $\rho_n < 1$.
Par l'étude ci-dessus, la fonction f_n admet un point fixe x_n. La suite (x_n) est une suite du compact K, il existe donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément $x_\infty \in K$. La relation
$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$$
donne
$$\frac{a}{\varphi(n)} + \frac{\varphi(n) - 1}{\varphi(n)} f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$$
et donc à la limite
$$f(x_\infty) = x_\infty$$

Exercice 16 : [énoncé]

(a) L est l'image d'un compact par une application continue donc L est compact.

(b) Supposons f^{-1} non continue : $\exists y \in L, \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists y' \in L$ tel que $|y' - y| \leq \alpha$ et $\left|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\right| > \varepsilon$.
Posons $x = f^{-1}(y)$ et en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$ définissons $y_n \in L$ puis $x_n = f^{-1}(y_n)$ tels que $|y_n - y| \leq \frac{1}{n}$ et $|x_n - x| > \varepsilon$. (x_n) est une suite d'éléments du compact K donc elle possède une sous-suite convergente : $(x_{\varphi(n)})$. Posons $a = \lim x_{\varphi(n)}$. Comme f est continue, $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(a)$ or $y_n \to y$ donc par unicité de la limite $y = f(a)$ puis $a = f^{-1}(y) = x$. Ceci est absurde puisque $\left|x_{\varphi(n)} - x\right| > \varepsilon$.

Exercice 17 : [énoncé]
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$$
et alors
$$\forall x, y \in [A\,;+\infty[, |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ (*)}$$

De plus, f est continue sur $[0\,;A]$ donc uniformément continue et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0\,;A], |y-x| \leq \alpha \implies |f(y)-f(x)| \leq \varepsilon (**)$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $|y-x| \leq \alpha$. On peut supposer $x \leq y$.
Si $x, y \in [0\,;A]$, on a $|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$ en vertu de (**)
Si $x, y \in [A\,;+\infty[$, on a à nouveau $|f(y)-f(x)| \leq \varepsilon$ cette fois-ci en vertu de (*).
Si $x \in [0\,;A]$ et $y \in [A\,;+\infty[$, on a nécessairement $|x-A| \leq \alpha$. (*) et (**) donnent alors

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(A)| + |f(A)-f(y)| \leq 2\varepsilon$$

Quitte à adapter le ε de départ, on obtient ce que l'on veut.
Autre méthode : on introduit $g = f \circ \tan$ définie sur $[0\,;\pi/2[$ que l'on prolonge par continuité en $\pi/2$. Ce prolongement est continue sur un segment donc uniformément continue. Puisque $f = g \circ \arctan$ avec arctan lipschitzienne, on obtient f uniformément continue !

Exercice 18 : [énoncé]

(a) $B_f(x,r)$ est une partie fermée et bornée en dimension finie donc compacte. L'application linéaire f étant continue (car au départ d'un espace de dimension finie), l'image $f(B_f(x,r))$ est aussi compacte.

(b) La partie K est convexe et donc $f(K)$ aussi car f est linéaire. Les vecteurs $f^k(a)$ étant tous éléments de K, la combinaison convexe définissant y_n détermine un élément de K.
Après simplification

$$f(y_n) - y_n = \frac{1}{n}\left(f^n(a) - a\right)$$

La partie K étant bornée, la suite $(f^n(a)-a)_{n\geq 1}$ l'est aussi et donc $f(y_n) - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$.
Enfin, la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ évolue dans le compact K, elle admet donc une valeur d'adhérence $w \in K$:

$$y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} w$$

et la propriété

$$f(y_{\varphi(k)}) - y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_E$$

donne à la limite $f(w) = w$.

(c) $0_E \notin K$ et donc $w \neq 0_E$. L'égalité $f(w) = w$ assure que 1 est valeur propre de f.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé avec $\|v\| < r$.
Le vecteur $x + v$ est élément de K et donc ses itérés $f^n(x+v) = f^n(x) + \lambda^n v$ le sont encore. Puisque le compact K est borné, les suites $(f^n(x+v))$ et $(f^n(x))$ le sont aussi et donc $(\lambda^n v)$ l'est encore. On en déduit $|\lambda| \leq 1$.

(d) Choisissons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable et cependant, en choisissant $x = (1,0,0)$ et $r = 1/2$, la condition $f(K) \subset K$ est remplie.

(e) Puisque $f(K) = K$, les vecteurs e_1/a, e_2/b et e_3/c sont des valeurs prises par f. On en déduit que l'endomorphisme f est nécessairement bijectif.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé. Quitte à réduire la norme de v, on peut supposer $v \in K$. On a alors $f^n(v) = \lambda^n.v \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui oblige $|\lambda| \leq 1$.
Sachant $f^{-1}(K) = K$, un raisonnement symétrique donne $|\lambda| \geq 1$ et donc $|\lambda| = 1$.
Enfin, en dimension impaire, un endomorphisme réel admet nécessairement une valeur propre !

Exercice 19 : [énoncé]

Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de F et posons u sa limite.
On peut écrire $u_n = \lambda_n.x_n$ avec $x_n \in K$ et $\lambda_n \geq 0$.
$0 \notin K$ donc

$$\exists \alpha > 0, B(0,\alpha) \subset C_E K$$

$\|u_n\| \to \|u\|$ et $\alpha \leq \|x_n\| \leq M$ donc (λ_n) est bornée.
Par double extraction $(x_{\varphi(n)})$ et $(\lambda_{\varphi(n)})$ convergent vers $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On a alors $u = \lambda.x$.

Exercice 20 : [énoncé]

Soient $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in L^{\mathbb{N}}$ telles que

$$d(K,L) = \inf_{(x,y)\in K\times L} d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

On peut extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ et on peut extraire de $(y_{\varphi(n)})$ une suite convergente $(y_{\varphi(\psi(n))})$.
Pour $x = \lim x_{\varphi(n)} \in K$ et $y = \lim y_{\varphi(\psi(n))} \in L$ on a

$$d(K,L) = d(x,y) > 0$$

car $K \cap L = \emptyset$.

Exercice 21 : [énoncé]
L'application $x \mapsto d(x, L) = \inf_{y \in L} \|y - x\|$ est une fonction réelle continue sur le compact K donc admet un minimum en un certain $a \in K$. Or $y \mapsto \|y - a\|$ est une fonction réelle continue sur le compact L donc admet un minimum en un certain $b \in L$. Ainsi

$$d(K, L) = \inf_{x \in K} \inf_{y \in L} \|y - x\| = \inf_{y \in L} \|y - a\| = \|b - a\| > 0$$

car $a \neq b$ puisque $K \cap L = \emptyset$.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Posons $d = d(x, F)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in F, \|x - x_n\| \leq d + \frac{1}{n}$$

Cela permet de définir une (x_n) bornée, elle admet donc une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ dont on note $\bar{x}$ la limite. On a $\bar{x} \in F$ car F est une partie fermée et puisque $\|x - x_n\| \to d$ on obtient $\|x - \bar{x}\| = d$.

(b) Non, prendre $x = 0$ et F l'hypersphère unité.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) Soit $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de Γ_f. On suppose que la suite $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ converge vers (x_∞, y_∞). Puisque $y_n = f(x_n)$, on obtient à la limite $y_\infty = f(x_\infty)$ car f est continue.
La partie Γ_f est alors fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

(b) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $a \in \mathbb{R}$ et $(y_n) = (f(x_n))$ son image.
Soit b une valeur d'adhérence de (y_n). Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$y_{\varphi(n)} \to b$$

On a alors

$$\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right) \to (a, b)$$

Or il s'agit d'une suite d'éléments du graphe Γ_f qui est supposé fermé. On en déduit $(a, b) \in \Gamma_f$ et donc $b = f(a)$.
Ainsi, la suite (y_n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Or elle évolue dans un compact car bornée en dimension finie et donc, si elle ne possède qu'une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.
Par la caractérisation séquentielle, on peut conclure que f est continue en a.

(c) Non, on obtient un contre-exemple avec la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est fermée car réunion de deux fermés

$$\{(x, y) \mid xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

mais cette fonction n'est pas continue.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) Soit $a \in E$. Puisque la partie A est bornée et non vide, l'ensemble $\{\|x - a\| \mid x \in A\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ ce qui permet d'introduire

$$R_a = \sup_{x \in A} \{\|x - a\| \mid x \in A\}$$

Il est immédiat que $A \subset \bar{B}(a, R_a)$ et que R_a est le rayon minimal d'une boule fermée de centre a contenant la partie A.
L'ensemble $\{R_a \mid a \in E\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, on peut donc introduire

$$R = \inf \{R_a \mid a \in E\}$$

Par la caractérisation séquentielle des bornes inférieures, il existe une suite (a_n) d'éléments de E telle que

$$R_{a_n} \to R$$

Soit $x_0 \in A$. Puisque $A \subset \bar{B}(a_n, R_{a_n})$, on a

$$\|x_0 - a_n\| \leq R_{a_n}$$

et donc

$$\|a_n\| \leq \|x_0\| + \|x_0 - a_n\| \leq \|x_0\| + R_n \to \|x_0\| + R$$

ce qui permet d'affirmer que la suite (a_n) est bornée. Puisque $\dim E < +\infty$, on peut extraire de (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ dont on notera a la limite.
Soit $x \in A$. Puisque

$$\|x - a_n\| \leq R_{a_n}$$

on obtient à la limite

$$\|x - a\| \leq R$$

et donc $A \subset \bar{B}(a, R)$.
Enfin, par construction, $\bar{B}(a, R)$ est une boule de rayon minimal contenant la partie A (en s'autorisant de parler de boule fermée de rayon nul dans le cas où $R = 0$).

(b) On suppose ici l'espace E euclidien.
Supposons $\bar{B}(a, R)$ et $\bar{B}(a', R)$ solutions et montrons $a = a'$.
Posons
$$b = \frac{1}{2}(a + a')$$
En vertu de l'identité du parallélogramme
$$\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\alpha+\beta\|^2 + \|\alpha-\beta\|^2\right)$$
appliquée à
$$\alpha = x - b \text{ et } \beta = \frac{a - a'}{2}$$
on obtient pour tout $x \in A$
$$\|x - b\|^2 + \|\beta\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x-a\|^2 + \|x-a'\|^2\right) \leq R^2$$
et donc
$$\|x - b\| \leq \sqrt{R^2 - \|\beta\|^2}$$
Ainsi
$$R_b \leq \sqrt{R^2 - \|\beta\|^2}$$
Or par définition de R, on a aussi $R_b \geq R$ et donc on peut affirmer $\|\beta\| = 0$ i.e. $a = a'$.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Soit (u_n) une suite convergente d'élément de F' de limite u_∞.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que
$$\|u_n - x_n\| \leq 1$$
Puisque la suite (u_n) converge, elle est bornée et donc la suite (x_n) l'est aussi. Puisque l'espace E est de dimension finie, on peut extraire une suite convergente de la suite (x_n). Notons-la $(x_{\varphi(n)})$. La limite x_∞ de cette suite extraite appartient à F car F est une partie fermée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\left\|u_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leq 1$$
donc à la limite
$$\|u_\infty - x_\infty\| \leq 1$$
et donc $u_\infty \in F'$.
Ainsi la partie F' est fermée.

(b) Supposons $E = \mathbb{K}[X]$ muni de la norme
$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{ avec } P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$
Posons
$$F = \left\{\frac{n+1}{n} X^n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$P_n = \frac{1}{n} X^n = \frac{n+1}{n} X^n - X^n \in F'$$
et
$$P_n \xrightarrow{\|.\|_1} 0 \notin F'$$
donc la partie F' n'est pas fermée.

Exercice 26 : [énoncé]

Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $f(F)$ de limite y_∞. On veut établir que $y_\infty \in f(F)$. Si y_∞ est l'un des éléments de la suite (y_n) l'affaire est entendue. Sans perte de généralités, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq y_\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = f(x_n)$. L'ensemble $K = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_\infty\}$ est un compact de E_2 donc $f^{-1}(K)$ est un compact de E_1. La suite (x_n) apparaît comme étant une suite d'éléments du compacte $f^{-1}(K)$, on peut donc en extraire une suite convergeant dans la partie $x_{\varphi(n)} \to x_\infty \in f^{-1}(K)$. De plus $(x_{\varphi(n)})$ étant une suite d'éléments du fermé F, on peut affirmer $x_\infty \in F$. On va maintenant établir $y_\infty = f(x_\infty)$ ce qui permettra de conclure. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $K_N = \{y_n \mid n \geq N\} \cup \{y_\infty\}$. K_N est un compact, $f^{-1}(K_N)$ est donc fermé et par suite $x_\infty \in f^{-1}(K_N)$. Ainsi, $x_\infty \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} f^{-1}(K_N) = f^{-1}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} K_N\right)$. Or $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} K_N = \{y_\infty\}$ donc $f(x_\infty) = y_\infty$.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Si E est de dimension finie alors F est fermé car tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé. On en déduit $F = \bar{F}$.

(b) Il suffit de considérer un sous-espace vectoriel dense comme par exemple l'espace des fonctions polynômes de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ dense dans celui des fonctions continues de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ normé par $\|.\|_\infty$.