Compacité

Valeurs d'adhérences d'une suite

Exercice 1 [02946] [Correction]
Soit a une suite de réels telle que $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a est un intervalle.

Exercice 2 [01162] [Correction]
Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que si une suite (u_n) d'éléments de K n'a qu'une seule valeur d'adhérence alors cette suite converge vers celle-ci.

Exercice 3 [01163] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \to 0$.
Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n) alors $-2a$ l'est aussi.
En déduire que (u_n) converge.

Exercice 4 [02947] [Correction]
Déterminer les suites réelles bornées telle que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)_{n\geq 0}$ converge.

Partie compacte

Exercice 5 [01160] [Correction]
Montrer que toute partie fermée d'une partie compacte est elle-même compacte.

Exercice 6 [01164] [Correction]
Soient K et L deux compacts d'un espace vectoriel normé E.
Établir que $K + L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$ est un compact de E.

Exercice 7 [01171] [Correction]
Soient E et F deux espaces normés, A une partie fermée de E et B une partie compacte de F.
Soit $f : A \to B$ une application vérifiant :
— $f^{-1}(\{y\})$ est compact pour tout $y \in B$;
— l'image de tout fermé de A est un fermé de B.
Montrer que A est compact.

Exercice 8 [02778] [Correction]
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

(a) Montrer
$$\forall x \in E, \exists y \in F,\ d(x, F) = \|x - y\|.$$

(b) Montrer, si $F \neq E$, qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.

(c) Montrer que E est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité fermée $B = \left\{x \in E \;\middle|\; \|x\| \leq 1\right\}$ est une partie compacte.

Exercice 9 [04165] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs.
Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ choisis dans $\mathbb{R}^n$, on écrit $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout indice i.

(a) Écrire un programme **Python** qui renvoie la valeur propre de module maximal d'une matrice passée en argument.

(b) Tester ce programme pour dix matrices carrées à coefficients pris aléatoirement dans $[1\,;2[$.

Soit
$$S = \left\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 0 \leq x \text{ et } \lambda x \leq Ax\right\}.$$

(c) Soit $\lambda \in S$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que
$$0 \leq x, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda x \leq Ax.$$

(d) Soit λ une valeur propre complexe. Montrer que $|\lambda| \in S$.

(e) Montrer que la partie S est majorée et expliciter un majorant.

(f) Montrer que S est une partie compacte.

(g) Soit $\alpha = \max S$. Montrer que α est une valeur propre de A strictement positive associée à un vecteur propre strictement positif.

Exercice 10 [04950] [Correction]
Soit K une partie compacte d'un espace normé E et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E recouvrant le compact K, c'est-à-dire vérifiant

$$K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i.$$

(a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, il existe au moins un indice $i \in I$ tel que la boule $B(x,\alpha)$ soit incluse dans Ω_i.

(b) Établir qu'il existe une famille finie $(x_1,\dots,x_n)$ constituée d'éléments de K telle que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\alpha).$$

(c) Conclure que l'on peut extraire de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ une sous-famille finie recouvrant K.

Compacité et continuité

Exercice 11 [01175] [Correction]
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

(a) Soit A une partie non vide de E. Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue sur E.

(b) Soit K un compact non vide inclus dans un ouvert U.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in K, B(x,\alpha) \subset U.$$

Exercice 12 [04089] [Correction]
Soient K un compact non vide d'un espace normé E et $f\colon K \to K$ telle que

$$\forall (x,y) \in K^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|.$$

(a) Montrer que f possède au plus un point fixe.

(b) Justifier qu'il existe $c \in K$ tel que

$$\forall x \in K, \|f(x) - x\| \geq \|f(c) - c\|.$$

(c) En déduire que f admet un point fixe.

Exercice 13 [01176] [Correction]
Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
On considère une application $f\colon K \to K$ vérifiant

$$\forall x,y \in K, x \neq y \implies d(f(x),f(y)) < d(x,y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 14 [03410] [Correction]
Soient f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I un segment inclus dans l'image de f.
Montrer qu'il existe un segment J tel que

$$f(J) = I.$$

Exercice 15 [03857] [Correction]
Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
On considère $f\colon K \to K$ une application ρ-lipschitzienne *i.e.* vérifiant

$$\forall x,y \in K, \|f(y) - f(x)\| \leq \rho\|y-x\|.$$

(a) On suppose $\rho < 1$. Montrer que f admet un point fixe.

(b) On suppose $\rho = 1$ et K convexe. Montrer à nouveau que f admet un point fixe. On pourra introduire, pour $a \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$f_n\colon x \mapsto \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} f(x).$$

Exercice 16 [01173] [Correction]
Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies.
Soient K un compact de E et $f\colon K \to F$ une application continue injective.

(a) On pose $L = f(K)$. Montrer que L est compact.

(b) Montrer que $f^{-1}\colon L \to K$ est continue.

Exercice 17 [04074] [Correction]
Soit f une fonction numérique continue sur $[0\,;+\infty[$ telle que f ait une limite finie ℓ en $+\infty$.
Démontrer que f est uniformément continue sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 18 [04103] [Correction]
E désigne un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E.

(a) Soit $x \in E$ et $r > 0$. Justifier que la boule $B_f(x,r)$ est compacte. Que dire de $f(B_f(x,r))$?

(b) Soit $x \in E$ et un réel r tel que $0 < r < \|x\|$. On note $K = B_f(x,r)$ et on suppose $f(K) \subset K$.
On fixe $a \in K$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(a).$$

Justifier que $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de K et que $f(y_n) - y_n$ tend vers 0_E. En déduire qu'il existe un vecteur $w \in K$ tel que $f(w) = w$.

(c) On reprend les notations précédentes et on suppose toujours $f(K) \subset K$. Montrer que $1 \in \operatorname{Sp} f$ et $\operatorname{Sp} f \subset [-1\,;1]$.

(d) À l'aide d'un exemple choisi en dimension 3, montrer que f n'est pas nécessairement diagonalisable.

(e) Dans cette dernière question, on choisit $\dim E = 3$, $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ base orthonormée de E et

$$K = \left\{x.e_1 + y.e_2 + z.e_3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\} \text{ avec } a,b,c > 0.$$

On suppose $f(K) = K$. Montrer que 1 ou -1 est valeur propre de f.

Exercice 19 [04993] [Correction]
Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On souhaite établir qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ soient tous égaux.

(a) Établir la propriété quand $n = 2$.

(b) Pour $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\delta(M) = \max_{1\leq i,j\leq n} |m_{j,j} - m_{i,i}|.$$

Montrer que la fonction $\varphi\colon P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mapsto \delta\big(P^{-1}AP\big)$ présente un minimum.

(c) Conclure.

Raisonnement de compacité

Exercice 20 [01166] [Correction]
Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E tel que $0 \notin K$.
On forme $F = \{\lambda.x \mid \lambda \in \mathbb{R}_+, x \in K\}$. Montrer que F est une partie fermée.

Exercice 21 [01167] [Correction]
Soient K et L deux compacts disjoints d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Montrer que $d(K,L) > 0$.

Exercice 22 [01174] [Correction]
Soient K et L deux compacts non vides et disjoints. Montrer

$$d(K,L) = \inf_{x\in K, y\in L} \|y - x\| > 0.$$

Exercice 23 [01168] [Correction]
Soit F une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E.

(a) Montrer que, pour tout $x \in E$, la distance de x à F est atteinte en un certain élément $y_0 \in F$.

(b) Y a-t-il unicité de cet élément y_0 ?

Exercice 24 [02772] [Correction]
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\Gamma_f = \big\{(x,f(x)) \;\big|\; x \in \mathbb{R}\big\}$$

son graphe.

(a) On suppose f continue. Montrer que Γ_f est fermé.

(b) On suppose f bornée et Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.

(c) Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f bornée ?

Exercice 25 [03274] [Correction]
Soit A une partie bornée non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E.

(a) Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A.

(b) On suppose l'espace E euclidien, montrer l'unicité de la boule précédente.

Exercice 26 [03305] [Correction]

(a) Soit F une partie fermée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
L'ensemble $F' = \bigcup_{x\in F} \overline{B(x,1)}$ est-il fermé ?

(b) Qu'en est-il si on ne suppose plus l'espace E de dimension finie ?

Exercice 27 [02776] [Correction]
Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés réels, f une application de E_1 dans E_2 telle que pour tout compact K de E_2, $f^{-1}(K)$ soit un compact de E_1.
Montrer, si F est un fermé de E_1, que $f(F)$ est un fermé de E_2.

Exercice 28 [01179] [Correction]
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E.

(a) On suppose E de dimension finie. Montrer que $\overline{F} = F$.

(b) On ne suppose plus E de dimension finie, montrer qu'il est possible que $\overline{F} \neq F$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite a.
Nous allons établir que A est un intervalle en observant que

$$\forall \alpha < \beta \in A, [\alpha\,;\beta] \subset A$$

(caractérisation usuelle des intervalles)
Soit $\alpha < \beta \in A$ et $\gamma \in [\alpha\,;\beta]$. Si $\gamma = \alpha$ ou $\gamma = \beta$ alors évidemment $\gamma \in A$.
Supposons maintenant $\gamma \in \,]\alpha\,;\beta[$.
Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $a_{n+1} - a_n \to 0$, il existe un rang N' tel que

$$\forall n \geq N', |a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon.$$

Comme α est valeur d'adhérence de a et que $\alpha < \gamma$ il existe $p \geq \max(N, N')$ tel que $a_p < \gamma$. Aussi, il existe $q \geq \max(N, N')$ tel que $a_q > \gamma$.
Si $p < q$, on introduit

$$E = \{n \in [\![p\,;q]\!], a_n < \gamma\}.$$

Cet ensemble E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car$p \in E$) et majoré (par$q$). Cet ensemble admet donc un plus grand élément r. Nécessairement $r < q$ car $a_q \geq \gamma$.
Puisque $r \in E$ et $r + 1 \notin E$, $a_r < \gamma \leq a_{r+1}$ et donc $|\gamma - a_r| \leq |a_{r+1} - a_r| \leq \varepsilon$.
Si $p > q$, un raisonnement semblable conduit à la même conclusion.
Finalement

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists r \geq N, |\gamma - a_r| \leq \varepsilon.$$

On peut donc affirmer que γ est valeur d'adhérence de a et conclure.

Exercice 2 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite d'éléments de K qui n'ait qu'une seule valeur d'adhérence ℓ.
Par l'absurde supposons que (u_n) ne converge par vers ℓ. On peut écrire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Par conséquent il existe une infinité de termes de cette suite tels que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
À partir de ces termes on peut construire une suite extraite de (u_n) qui étant une suite d'éléments du compact K possèdera une valeur d'adhérence qui ne peut être que ℓ compte tenu de l'hypothèse.
C'est absurde, car tous ces termes vérifient $|u_n - \ell| > \varepsilon$.

Exercice 3 : [énoncé]
Posons

$$\varepsilon_n = u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \to 0.$$

Si $u_{\varphi(n)} \to a$ alors $u_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2u_{\varphi(n)} \to -2a$. Ainsi

$$a \in \mathrm{Adh}(u) \implies -2a \in \mathrm{Adh}(u).$$

Si (u_n) possède une valeur d'adhérence a autre que 0 alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-2)^k a$ est aussi valeur d'adhérence. Or ceci est impossible car (u_n) est bornée.
Puisque (u_n) est bornée et que 0 est sa seule valeur d'adhérence possible, $u_n \to 0$.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{2}{3}\ell$ de sorte que $\varepsilon_n = v_n + \frac{v_{2n}}{2} \to 0$.
Soit a une valeur d'adhérence de la suite (v_n).
Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_{\varphi(n)} \to a$.

$$v_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2v_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2a$$

donc $-2a$ est aussi valeur d'adhérence de (v_n).
En reprenant ce processus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(-2)^p a$ est valeur d'adhérence de (v_n).
Or la suite (u_n) est bornée, la suite (v_n) l'est donc aussi et ses valeurs d'adhérence le sont encore. On peut donc affirmer $a = 0$.
La suite (v_n) est bornée et 0 est sa seule valeur d'adhérence donc elle converge vers 0 (car si tel n'était pas le cas, il existerait une infinité de termes de la suite (v_n) en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon\,;\varepsilon], \varepsilon > 0$, et de ces termes bornés on pourrait extraire une suite convergente d'où l'existence d'une valeur d'adhérence non nulle).

Exercice 5 : [énoncé]
Soit F une partie fermée d'un compact K. Si (x_n) est une suite d'éléments de F, alors c'est aussi une suite d'éléments de K et on peut donc en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans K. Cette suite extraite est aussi une suite convergente d'éléments du fermé F, sa limite appartient donc à F. Au final, il existe une suite extraire de (x_n) convergeant dans F.

Exercice 6 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite d'éléments de $K + L$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in K$ et $b_n \in L$. On peut extraire de la suite (a_n) d'éléments

du compact K, une suite $(a_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément de K. On peut aussi extraire de la suite $(b_{\varphi(n)})$ d'éléments du compact L, une suite $(b_{\varphi(\psi(n))})$ convergeant vers un élément de L. Pour l'extractrice $\theta = \varphi \circ \psi$, $(a_{\theta(n)})$ et $(b_{\theta(n)})$ convergent vers des éléments de K et L donc $(u_{\theta(n)})$ converge vers un élément de $K + L$.
Autre démonstration $K + L$ est l'image du compact $K \times L$ de E^2 par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$.

Exercice 7 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite d'éléments de A. On va établir que cette suite possède une valeur d'adhérence dans A.
On pose $F_n = \overline{\{u_p \mid p \geq n\}}$. La suite (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides. Posons $G_n = f(F_n)$. La suite (G_n) est une suite décroissante de fermés non vides. On peut considérer $y_n \in G_n$. La suite (y_n) possède une valeur d'adhérence y car B est compact. Pour tout $p \geq n$, on a $y_p \in G_p \subset G_n$ donc $y \in G_n$. Par suite, il existe $t_n \in F_n$ tel que $y = f(t_n)$. La suite (t_n) est une suite du compact $f^{-1}\{y\}$, elle possède donc une valeur d'adhérence t. Pour tout $p \geq n$, $t_p \in F_p \subset F_n$ donc $t \in F_n$.
Ainsi, t est une valeur d'adhérence de (u_n).

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Par définition
$$d(x, F) = \inf\left\{\|x - y\| \mid y \in F\right\}.$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Le réel $d(x, F) + 1/(n + 1)$ ne minore par l'ensemble $\left\{\|x - y\| \mid y \in F\right\}$ et donc il existe $y_n \in F$ tel que
$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n + 1}.$$
En faisant varier n, cela détermine une suite (y_n) d'éléments de F vérifiant
$$\|x - y_n\| \to d(x, F).$$
Cette suite est bornée et évolue dans l'espace vectoriel normé F qui est de dimension finie, elle admet donc une valeur d'adhérence y dans F pour laquelle on obtient
$$d(x, F) = \|x - y\|.$$

(b) Puisque $F \neq E$, il existe un vecteur x de E n'appartenant pas à F. On vérifie aisément
$$d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$$
car pour $\lambda \neq 0$
$$\left\{\|\lambda x - y\| \mid y \in F\right\} = \left\{\left\|\lambda(x - y')\right\| \,\middle|\, y' \in F\right\}.$$
Il est donc possible de choisir x vérifiant $d(x, F) = 1$.
Pour tout vecteur $y \in F$, on a aussi $d(x - y, F) = 1$ car
$$\left\{\|x - z\| \mid z \in F\right\} = \left\{\|x - y - z'\| \mid z' \in F\right\}.$$
Il ne reste plus qu'à trouver $y \in F$ tel que $\|x - y\| = 1$. Le vecteur $y \in F$ vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$ convient. Le vecteur $u = x - y$ est alors solution.

(c) Si E est de dimension finie, la boule B est compacte car fermée et bornée en dimension finie.
Inversement, supposons par l'absurde que B est compacte et E de dimension infinie. Par récurrence, on construit une suite (u_n) de vecteurs de E en posant u_0 un vecteur unitaire quelconque, puis une fois $u_0, \dots, u_n$ déterminés, on définit u_{n+1} de sorte que
$$d(u_{n+1}, \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n)) = \|u_{n+1}\| = 1.$$
Cette construction est possible par l'étude qui précède car E est supposé de dimension infinie.
La suite (u_n) ainsi définie est une suite d'éléments du compact B, on peut donc en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(n)})$. Puisque cette suite converge
$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \to 0$$
or
$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \geq d(u_{\varphi(n+1)}, \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_{\varphi(n+1)-1})) \geq 1.$$
C'est absurde.

Exercice 9 : [énoncé]

(a)
```
import numpy as np
import numpy.linalg

def eigmax(A):
    eig = numpy.linalg.eigvals(A)
```

```
    maxi = eig[0]
    for e in eig:
        if abs(e) > abs(maxi): maxi = e
    return maxi
```

(b)
```
import random as rnd

def generematrice(n):
    A = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i,j] = 1 + rnd.random()
    return A

for t in range(10):
    print(eigmax(generematrice(3)))
```

(c) Soit $\lambda \in S$. Il existe x non nul à coefficients positifs tel que $\lambda x \leq Ax$. En divisant x par la somme de ses coefficients (qui est un réel strictement positif), on détermine un nouveau vecteur comme voulu.

(d) Soit λ une valeur propre complexe et $z = (z_1, \dots, z_n)$ le vecteur propre associé. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,

$$\lambda z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$$

et donc

$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}}_{\geq 0} |z_j|.$$

Le vecteur $x = (|z_1|, \dots, |z_n|)$, est un vecteur réel non nul vérifiant $0 \leq x$ et $|\lambda| x \leq Ax$. On en déduit $|\lambda| \in S$.

(e) Soit $\lambda \in S$ et $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $0 \leq x$ et $\lambda x \leq Ax$. Considérons i l'indice tel que x_i soit maximal parmi $x_1, \dots, x_n$. On a

$$\lambda x_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i.$$

En simplifiant par x_i (qui est strictement positif car $0 \leq x$ et x non nul), il vient

$$\lambda \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$

On en déduit que la partie S est majorée par le réel

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$

(f) La partie S est bornée dans un espace de dimension finie, il suffit d'établir qu'elle est fermée pour pouvoir affirmer qu'elle est compacte.
Soit (λ_p) une suite d'éléments de S de limite λ_∞. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut introduire $x_p \in \mathbb{R}^n$ à coefficients positifs de somme égale à 1 et vérifiant $\lambda_p x_p \leq A x_p$. La suite (x_p) évolue dans le compact

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 0 \leq x \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(q)})$ de limite $x_\infty \in K$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\lambda_{\varphi(q)} x_{\varphi(q)} \leq A x_{\varphi(q)}$ ce qui donne à la limite $\lambda_\infty x_\infty \leq A x_\infty$. On peut donc affirmer que λ_∞ est élément de S. La partie S contient les limites de ses suites convergentes, elle est donc fermée et finalement compacte.

(g) La compacité de S permet d'introduire son élément maximal α. Soit aussi $x \in K$ tel que $\alpha x \leq Ax$. Si $\alpha x \neq Ax$, le vecteur $y = Ax - \alpha x$ est à coefficients positifs et n'est pas nul. La matrice A étant à coefficients strictement positifs, Ay est à coefficients strictement positifs. Considérons ensuite $z = Ax$. Le vecteur z est à coefficients strictement positifs car les coefficients de A sont strictement positifs et les coefficients de x sont positifs et non tous nuls. Quitte à considérer $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut écrire $\varepsilon z \leq Ay$. Cette comparaison se réorganise pour permettre d'écrire

$$(\alpha + \varepsilon) z = Az$$

ce qui contredit la définition de α. On en déduit $\alpha x = Ax$ et, comme souligné au-dessus, $z = Ax$ est un vecteur à coefficients strictement positifs ce qui entraine $\alpha > 0$ et x à coefficients strictement positifs.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) Par l'absurde supposons qu'un tel $\alpha > 0$ n'existe pas. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en considérant $\alpha_n = 1/(n+1) > 0$, il existe un élément $x_n \in K$ tel que

$$B(x_n, \alpha_n) \not\subset \Omega_i \quad \text{pour tout } i \in I. \tag{1}$$

En faisant varier n, ceci détermine une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments du compact K. On peut extraire de cette suite une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément x de K. La famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ recouvrant K, il existe au moins un indice $i \in I$ tel que x est élément de Ω_i. Or Ω_i est une partie ouverte, on peut donc introduire $\alpha > 0$ tel que $B(x,\alpha) \subset \Omega_i$. Cependant, pour n assez grand, on a à la fois

$$\left\|x_{\varphi(n)} - x\right\| \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{\varphi(n)} \leq \frac{\alpha}{2}$$

de sorte que

$$B(x_{\varphi(n)}, \alpha_{\varphi(n)}) \subset B(x,\alpha) \subset \Omega_i.$$

C'est absurde puisque cela contredit (??).

(b) Par l'absurde supposons qu'une telle famille finie n'existe pas et construisons par récurrence une suite (x_n) d'éléments de K en choisissant arbitrairement x_0 dans K puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en choisissant x_{n+1} dans K privé de la réunion des $B(x_i, \alpha)$ pour i allant de 0 à n (l'hypothèse absurde assure que ce choix est possible).

Par compacité de K, on peut extraire de la suite (x_n) une suite convergente. En notant x sa limite, on peut déterminer dans (x_n) des termes arbitrairement proches de x. En particulier, on peut trouver x_n et x_{n+p} avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\|x_n - x\| < \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \|x_{n+p} - x\| < \frac{\alpha}{2}.$$

Ceci entraîne $\|x_{n+p} - x_n\| < \alpha$ et donc x_{n+p} est élément de la boule de centre x_n et de rayon α. Ceci est absurde car contredit le protocole suivi pour choisir x_{n+p}.

(c) Partant de la suite finie $(x_1, \dots, x_n)$ qu'on peut introduire grâce à la question précédente, on introduit des indices $i_1, \dots, i_n \in I$ déterminés de sorte que

$$B(x_j, \alpha) \subset \Omega_{i_j} \quad \text{pour tout } j \in [\![1\,;n]\!].$$

On a alors

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\alpha) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \Omega_{i_j}$$

et ainsi on peut conclure que le compact K peut être recouvert par une sous-famille finie de la famille d'ouverts $(\Omega_i)_{i\in I}$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Soient $x, x' \in E$.

$$\forall y \in A, \|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$$

donc $d(x,A) \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$ puis $d(x,A) - \|x - x'\| \leq \|x' - y\|$ et $d(x,A) - \|x - x'\| \leq d(x',A)$.
Ainsi $d(x,A) - d(x',A) \leq \|x - x'\|$ et par symétrie $\left|d(x,A) - d(x',A)\right| \leq \|x - x'\|$.
Finalement $x \mapsto d(x,A)$ est 1 lipschitzienne donc continue.

(b) Considérons l'application $x \mapsto d(x, \mathcal{C}_E U)$ définie sur le compact K.
Cette application est bornée et atteint ses bornes. Posons $\alpha = \min_{x\in K} d(x, \mathcal{C}_E U)$ atteint en $x_0 \in K$.
Si $\alpha = 0$ alors $x_0 \in \overline{\mathcal{C}_E U}$ or $\mathcal{C}_E U$ est fermé et donc $x_0 \notin U$ or $x_0 \in K$.
Nécessairement $\alpha > 0$ et alors

$$\forall x \in K, B(x,\alpha) \subset U.$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Supposons que f possède deux points fixes $x \neq y$.
L'hypothèse de travail donne

$$\left\|f(x) - f(y)\right\| < \|x - y\|$$

ce qui est absurde si $f(x) = x$ et $f(y) = y$.

(b) On introduit la fonction $\delta\colon x \mapsto \left\|f(x) - x\right\|$ définie sur K.
La fonction δ est continue sur le compact K, elle admet donc un minimum en un $c \in K$ et alors

$$\forall x \in K, \delta(x) \geq \delta(c).$$

(c) Par l'absurde, si $f(c) \neq c$ alors

$$\delta(f(c)) = \left\|f(f(c)) - f(c)\right\| < \left\|f(c) - c\right\| = \delta(c)$$

ce qui contredit la minimalité de c. Il reste $f(c) = c$ ce qui fournit un point fixe.

Exercice 13 : [énoncé]

Unicité : Si $x \neq y$ sont deux points fixes distincts on a

$$d(x,y) = d(f(x), f(y) < d(x,y).$$

C'est exclu et il y a donc unicité du point fixe.
Existence : Considérons la fonction réelle $g\colon x \mapsto d(x, f(x))$ définie sur K. Par composition g est continue et puisque K est une partie compacte non vide, g atteint son minimum en un certain $x_0 \in K$.

Si $f(x_0) \neq x_0$ on a alors

$$g(f(x_0)) = d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0) = g(x_0)$$

ce qui contredit la définition de x_0. Nécessairement $f(x_0) = x_0$ ce qui résout le problème.

Exercice 14 : [énoncé]
Notons α, β les extrémités de I.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des antécédents de α, β respectivement. Malheureusement, on ne peut pas déjà affirmer $f([a\,;b]) = [\alpha\,;\beta]$ car les variations de f sur $[a\,;b]$ sont inconnues.
Posons

$$A = \left\{x \in [a\,;b] \mid f(x) = \alpha\right\} \text{ et } B = \left\{x \in [a\,;b] \mid f(x) = \beta\right\}.$$

Considérons ensuite

$$\Delta = \left\{|y - x| \mid x \in A, y \in B\right\}$$

Δ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. On peut donc introduire sa borne inférieure m. Par la caractérisation séquentielle des bornes inférieures, il existe deux suites $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in B^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$|y_n - x_n| \to m.$$

La partie A étant fermée et bornée, on peut extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans A. De la suite $(y_{\varphi(n)})$, on peut aussi extraire une suite convergeant dans B et en notant x_∞ et y_∞ les limites de ces deux suites, on obtient deux éléments vérifiant

$$x_\infty \in A, y_\infty \in B \text{ et } |y_\infty - x_\infty| = \min \Delta.$$

Autrement dit, on a définit des antécédents des extrémités de I dans $[a\,;b]$ les plus proches possibles.
Pour fixer les idées, supposons $x_\infty \leq y_\infty$ et considérons $J = [x_\infty\,;y_\infty]$.
On a $\alpha, \beta \in f(J)$ et $f(J)$ intervalle (car image continue d'un intervalle) donc

$$I \subset f(J).$$

Soit $\gamma \in f(J)$. Il existe $c \in J$ tel que $f(c) = \gamma$.
Si $\gamma < \alpha$ alors en appliquant le théorème de valeurs intermédiaires sur $[z\,;y_\infty]$, on peut déterminer un élément de A plus proche de y_∞ que ne l'est x_∞. Ceci contredit la définition de ces deux éléments.
De même $\gamma > \beta$ est impossible et donc $f(J) \subset I$ puis l'égalité.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) La fonction f est continue car lipschitzienne. Considérons $g\colon x \in K \mapsto \|f(x) - x\|$. La fonction g est réelle, continue et définie sur un compact non vide, elle admet donc un minimum en un certain $x_0 \in K$.
Puisque

$$g(x_0) \leq g(f(x_0)) = \|f(f(x_0)) - f(x_0)\| \leq \rho\|f(x_0) - x_0\| = \rho g(x_0) \text{ avec } \rho < 1.$$

On a nécessairement $g(x_0) = 0$ et donc $f(x_0) = x_0$ ce qui fournit un point fixe pour f.

(b) Par la convexité de K, on peut affirmer que f_n est une application de K vers K.
De plus

$$\|f_n(y) - f_n(x)\| = \frac{n-1}{n}\|f(y) - f(x)\| \leq \rho_n\|y - x\|$$

avec $\rho_n < 1$.
Par l'étude ci-dessus, la fonction f_n admet un point fixe x_n. La suite (x_n) est une suite du compact K, il existe donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément $x_\infty \in K$. La relation

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$$

donne

$$\frac{a}{\varphi(n)} + \frac{\varphi(n) - 1}{\varphi(n)} f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$$

et donc à la limite

$$f(x_\infty) = x_\infty.$$

Exercice 16 : [énoncé]

(a) L est l'image d'un compact par une application continue donc L est compact.

(b) Supposons f^{-1} non continue : $\exists y \in L, \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists y' \in L$ tel que $|y' - y| \leq \alpha$ et $\left|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\right| > \varepsilon$.
Posons $x = f^{-1}(y)$ et en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$ définissons $y_n \in L$ puis $x_n = f^{-1}(y_n)$ tels que $|y_n - y| \leq \frac{1}{n}$ et $|x_n - x| > \varepsilon$. (x_n) est une suite d'éléments du compact K donc elle possède une sous-suite convergente : $(x_{\varphi(n)})$. Posons $a = \lim x_{\varphi(n)}$. Comme f est continue, $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(a)$ or $y_n \to y$ donc par unicité de la limite $y = f(a)$ puis $a = f^{-1}(y) = x$. Ceci est absurde puisque $|x_{\varphi(n)} - x| > \varepsilon$.

Exercice 17 : [énoncé]
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq A, \left|f(x) - \ell\right| \leq \varepsilon/2$$

et alors

$$\forall x, y \in [A\,;+\infty[, \left|f(y) - f(x)\right| \leq \varepsilon \text{ (*)}.$$

De plus, f est continue sur $[0\,;A]$ donc uniformément continue et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0\,;A], |y - x| \leq \alpha \implies \left|f(y) - f(x)\right| \leq \varepsilon\text{(**)}.$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $|y - x| \leq \alpha$. On peut supposer $x \leq y$.
Si $x, y \in [0\,;A]$, on a $\left|f(y) - f(x)\right| \leq \varepsilon$ en vertu de (**)
Si $x, y \in [A\,;+\infty[$, on a à nouveau $\left|f(y) - f(x)\right| \leq \varepsilon$ cette fois-ci en vertu de (*).
Si $x \in [0\,;A]$ et $y \in [A\,;+\infty[$, on a nécessairement $|x - A| \leq \alpha$. (*) et (**) donnent alors

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq \left|f(x) - f(A)\right| + \left|f(A) - f(y)\right| \leq 2\varepsilon.$$

Quitte à adapter le ε de départ, on obtient ce que l'on veut.
Autre méthode : on introduit $g = f \circ \tan$ définie sur $[0\,;\pi/2[$ que l'on prolonge par continuité en $\pi/2$. Ce prolongement est continue sur un segment donc uniformément continue. Puisque $f = g \circ \arctan$ avec arctan lipschitzienne, on obtient f uniformément continue !

Exercice 18 : [énoncé]

(a) $B_f(x, r)$ est une partie fermée et bornée en dimension finie donc compacte. L'application linéaire f étant continue (car au départ d'un espace de dimension finie), l'image $f\big(B_f(x, r)\big)$ est aussi compacte.

(b) La partie K est convexe et donc $f(K)$ aussi car f est linéaire. Les vecteurs $f^k(a)$ étant tous éléments de K, la combinaison convexe définissant y_n détermine un élément de K.
Après simplification

$$f(y_n) - y_n = \frac{1}{n}\big(f^n(a) - a\big).$$

La partie K étant bornée, la suite $\big(f^n(a) - a\big)_{n\geq 1}$ l'est aussi et donc $f(y_n) - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$.
Enfin, la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ évolue dans le compact K, elle admet donc une valeur d'adhérence $w \in K$:

$$y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} w$$

et la propriété

$$f(y_{\varphi(k)}) - y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_E$$

donne à la limite $f(w) = w$.

(c) $0_E \notin K$ et donc $w \neq 0_E$. L'égalité $f(w) = w$ assure que 1 est valeur propre de f.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé avec $\|v\| < r$.
Le vecteur $x + v$ est élément de K et donc ses itérés $f^n(x + v) = f^n(x) + \lambda^n v$ le sont encore. Puisque le compact K est borné, les suites $\big(f^n(x + v)\big)$ et $\big(f^n(x)\big)$ le sont aussi et donc $\big(\lambda^n v\big)$ l'est encore. On en déduit $|\lambda| \leq 1$.

(d) Choisissons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable et cependant, en choisissant $x = (1, 0, 0)$ et $r = 1/2$, la condition $f(K) \subset K$ est remplie.

(e) Puisque $f(K) = K$, les vecteurs e_1/a, e_2/b et e_3/c sont des valeurs prises par f. On en déduit que l'endomorphisme f est nécessairement bijectif.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé. Quitte à réduire la norme de v, on peut supposer $v \in K$. On a alors $f^n(v) = \lambda^n.v \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui oblige $|\lambda| \leq 1$.
Sachant $f^{-1}(K) = K$, un raisonnement symétrique donne $|\lambda| \geq 1$ et donc $|\lambda| = 1$.
Enfin, en dimension impaire, un endomorphisme réel admet nécessairement une valeur propre !

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Introduisons les coefficients de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et recherchons $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ sous la forme d'une matrice de rotation

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ à choisir.}$$

Après calculs,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = a\cos^2(\theta) + d\sin^2(\theta) + (b+c)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \beta = b\cos^2(\theta) - c\sin^2(\theta) + (d-a)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \gamma = c\cos^2(\theta) - b\sin^2(\theta) + (d-a)\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \delta = d\cos^2(\theta) + a\sin^2(\theta) - (b+c)\cos(\theta)\sin(\theta). \end{cases}$$

Les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont égaux si, et seulement si,

$$\underbrace{(a-d)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2(b+c)\cos(\theta)\sin(\theta)}_{=f(\theta)} = 0.$$

La fonction f ainsi définie est continue, prend la valeur $a-d$ en $\theta = 0$ et la valeur opposée en $\theta = \pi/2$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que cette fonction s'annule ce qui détermine un réel θ pour lequel les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont égaux [1].

(b) *On montre que la fonction à valeurs réelles φ est continue sur une partie fermée bornée.*

Commençons par établir que δ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tous $i, j \in [\![1\,;n]\!]$, la fonction $M \mapsto m_{j,j} - m_{i,i}$ est continue car linéaire au départ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par composition, $M \mapsto |m_{j,j} - m_{i,i}|$ est donc aussi continue. De plus, lorsque f et g sont deux fonctions continues définies sur un même domaine X et à valeurs réelles, la fonction $\max(f, g)$ est aussi continue car on peut écrire

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}\big(f + g + |f-g|\big).$$

Par récurrence, on généralise cette propriété au cas où l'on considère le max de plusieurs fonctions. On en déduit la continuité de l'application δ.

Pour tout $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on sait $P^{-1} = {}^tP$. L'application $P \mapsto {}^tP$ est linéaire donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on en déduit la continuité [2] de $P \mapsto P^{-1}$ sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Par produit de fonctions continues puis par composition, on acquiert successivement les continuités des fonctions $P \mapsto P^{-1}AP$ et $P \mapsto \varphi(P)$ sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Enfin, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée bornée [3] non vide et donc φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, φ présente un minimum.

(c) Soit P une matrice de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ réalisant le minimum de φ. Montrons que $\varphi(P)$ est nul ce qui entraîne immédiatement que les coefficients diagonaux de la matrice $M = P^{-1}AP$ sont tous égaux.

1. Il sont alors égaux à $\frac{1}{2}(a+d)$ car la matrice A est de trace $a+d$.
2. Plus généralement, il est possible d'établir que $P \mapsto P^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Voir sujet 20180318.

Par l'absurde, supposons $\varphi(P) = \delta(M) > 0$ et introduisons $k, \ell \in [\![1\,;n]\!]$ tels que

$$m_{k,k} = \min_{1 \le i \le n} m_{i,i} \quad \text{et} \quad m_{\ell,\ell} = \max_{1 \le i \le n} m_{i,i}.$$

Tous les coefficients diagonaux de M sont alors compris entre $m_{k,k}$ et $m_{\ell,\ell}$ et l'on a $\varphi(M) = m_{\ell,\ell} - m_{k,k}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, considérons ensuite la matrice $Q = (q_{i,j})$ définie par

$$\begin{pmatrix} q_{k,k} & q_{k,\ell} \\ q_{\ell,k} & q_{\ell,\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_{i,i} = 1 & \text{si } i \neq k, \ell \\ q_{i,j} = 0 & \text{si } i \neq j \text{ et } \{i,j\} \neq \{k,\ell\}. \end{cases}$$

La matrice Q est orthogonale car ses colonnes sont unitaires et deux à deux orthogonales. Comme cela a été vu dans la première question, il est possible de choisir θ de sorte que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,\ell} \\ m_{\ell,k} & m_{\ell,\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

avec $\lambda = \frac{1}{2}(m_{k,k} + m_{\ell,\ell})$. Les coefficients diagonaux d'indices k et ℓ du produit $Q^{-1}MQ$ sont alors égaux à λ tandis que les autres restent inchangés.
S'il n'existe qu'une seule paire d'indices (k, ℓ) pour lesquels $m_{k,k}$ et $m_{\ell,\ell}$ soient les coefficients diagonaux extrêmes de M, on est assuré que $\delta\big(Q^{-1}MQ\big) < \delta(M)$ ce qui est absurde car

$$\delta\big(Q^{-1}MQ\big) = \delta(Q^{-1}P^{-1}APQ) = \varphi(R) \quad \text{avec} \quad R = PQ \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$

Sinon, on poursuit ce qui précède avec une autre paire (k, ℓ) convenable et cela autant de fois que nécessaire pour qu'au moins l'une des deux valeurs extrêmes parmi les coefficients diagonaux initiaux de M ait disparu. Ceci permet de parvenir de nouveau à l'absurdité précédente.

Exercice 20 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de F et posons u sa limite.
On peut écrire $u_n = \lambda_n.x_n$ avec $x_n \in K$ et $\lambda_n \geq 0$.
$0 \notin K$ donc

$$\exists \alpha > 0, B(0,\alpha) \subset C_E K$$

$\|u_n\| \to \|u\|$ et $\alpha \leq \|x_n\| \leq M$ donc (λ_n) est bornée.
Par double extraction $(x_{\varphi(n)})$ et $(\lambda_{\varphi(n)})$ convergent vers $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On a alors $u = \lambda.x$.

Exercice 21 : [énoncé]
Soient $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in L^{\mathbb{N}}$ telles que

$$d(K,L) = \inf_{(x,y)\in K\times L} d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n).$$

On peut extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ et on peut extraire de $(y_{\varphi(n)})$ une suite convergente $(y_{\varphi(\psi(n))})$.
Pour $x = \lim x_{\varphi(n)} \in K$ et $y = \lim y_{\varphi(\psi(n))} \in L$ on a

$$d(K,L) = d(x,y) > 0$$

car $K \cap L = \emptyset$.

Exercice 22 : [énoncé]
L'application $x \mapsto d(x,L) = \inf_{y\in L}\|y-x\|$ est une fonction réelle continue sur le compact K donc admet un minimum en un certain $a \in K$. Or $y \mapsto \|y-a\|$ est une fonction réelle continue sur le compact L donc admet un minimum en un certain $b \in L$. Ainsi

$$d(K,L) = \inf_{x\in K}\inf_{y\in L}\|y-x\| = \inf_{y\in L}\|y-a\| = \|b-a\| > 0$$

car $a \neq b$ puisque $K \cap L = \emptyset$.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) Posons $d = d(x,F)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in F, \|x-x_n\| \le d + \frac{1}{n}.$$

Cela permet de définir une (x_n) bornée, elle admet donc une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ dont on note $\overline{x}$ la limite. On a $\overline{x} \in F$ car F est une partie fermée et puisque $\|x-x_n\| \to d$ on obtient $\left\|x-\overline{x}\right\| = d$.

(b) Non, prendre $x = 0$ et F l'hypersphère unité.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) Soit $\big((x_n,y_n)\big)_{n\ge 0}$ une suite d'éléments de Γ_f. On suppose que la suite $\big((x_n,y_n)\big)_{n\ge 0}$ converge vers (x_∞,y_∞). Puisque $y_n = f(x_n)$, on obtient à la limite $y_\infty = f(x_\infty)$ car f est continue.
La partie Γ_f est alors fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

(b) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $a \in \mathbb{R}$ et $(y_n) = \big(f(x_n)\big)$ son image.
Soit b une valeur d'adhérence de (y_n). Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$y_{\varphi(n)} \to b.$$

On a alors

$$(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \to (a,b).$$

Or il s'agit d'une suite d'éléments du graphe Γ_f qui est supposé fermé. On en déduit $(a,b) \in \Gamma_f$ et donc $b = f(a)$.
Ainsi, la suite (y_n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Or elle évolue dans un compact car bornée en dimension finie et donc, si elle ne possède qu'une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.
Par la caractérisation séquentielle, on peut conclure que f est continue en a.

(c) Non, on obtient un contre-exemple avec la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est fermée car réunion de deux fermés

$$\big\{(x,y) \bigm| xy = 1\big\} \cup \big\{(0,0)\big\}$$

mais cette fonction n'est pas continue.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Soit $a \in E$. Puisque la partie A est bornée et non vide, l'ensemble $\big\{\|x-a\| \bigm| x \in A\big\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ ce qui permet d'introduire

$$R_a = \sup_{x\in A}\big\{\|x-a\| \bigm| x \in A\big\}.$$

Il est immédiat que $A \subset \overline{B}(a,R_a)$ et que R_a est le rayon minimal d'une boule fermée de centre a contenant la partie A.
L'ensemble $\{R_a \mid a \in E\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, on peut donc introduire

$$R = \inf\{R_a \mid a \in E\}.$$

Par la caractérisation séquentielle des bornes inférieures, il existe une suite (a_n) d'éléments de E telle que

$$R_{a_n} \to R.$$

Soit $x_0 \in A$. Puisque $A \subset \overline{B}(a_n, R_{a_n})$, on a

$$\|x_0 - a_n\| \le R_{a_n}$$

et donc

$$\|a_n\| \le \|x_0\| + \|x_0 - a_n\| \le \|x_0\| + R_n \to \|x_0\| + R$$

ce qui permet d'affirmer que la suite (a_n) est bornée. Puisque $\dim E < +\infty$, on peut extraire de (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ dont on notera a la limite.
Soit $x \in A$. Puisque

$$\|x - a_n\| \le R_{a_n}$$

on obtient à la limite

$$\|x - a\| \le R$$

et donc $A \subset \overline{B}(a, R)$.
Enfin, par construction, $\overline{B}(a, R)$ est une boule de rayon minimal contenant la partie A (en s'autorisant de parler de boule fermée de rayon nul dans le cas où $R = 0$).

(b) On suppose ici l'espace E euclidien.
Supposons $\overline{B}(a, R)$ et $\overline{B}(a', R)$ solutions et montrons $a = a'$.
Posons

$$b = \frac{1}{2}(a + a').$$

En vertu de l'identité du parallélogramme

$$\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2\right)$$

appliquée à

$$\alpha = x - b \text{ et } \beta = \frac{a - a'}{2}$$

on obtient pour tout $x \in A$

$$\|x - b\|^2 + \|\beta\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x - a\|^2 + \|x - a'\|^2\right) \le R^2$$

et donc

$$\|x - b\| \le \sqrt{R^2 - \|\beta\|^2}.$$

Ainsi

$$R_b \le \sqrt{R^2 - \|\beta\|^2}.$$

Or par définition de R, on a aussi $R_b \ge R$ et donc on peut affirmer $\|\beta\| = 0$ i.e. $a = a'$.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Soit (u_n) une suite convergente d'élément de F' de limite u_∞.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que

$$\|u_n - x_n\| \le 1.$$

Puisque la suite (u_n) converge, elle est bornée et donc la suite (x_n) l'est aussi. Puisque l'espace E est de dimension finie, on peut extraire une suite convergente de la suite (x_n). Notons-la $(x_{\varphi(n)})$. La limite x_∞ de cette suite extraite appartient à F car F est une partie fermée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| \le 1$$

donc à la limite

$$\|u_\infty - x_\infty\| \le 1$$

et donc $u_\infty \in F'$.
Ainsi la partie F' est fermée.

(b) Supposons $E = \mathbb{K}[X]$ muni de la norme

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{ avec } P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k.$$

Posons

$$F = \left\{ \frac{n+1}{n} X^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \frac{1}{n} X^n = \frac{n+1}{n} X^n - X^n \in F'$$

et

$$P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0 \notin F'$$

donc la partie F' n'est pas fermée.

Exercice 27 : [énoncé]

Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $f(F)$ de limite y_∞. On veut établir que $y_\infty \in f(F)$. Si y_∞ est l'un des éléments de la suite (y_n) l'affaire est entendue. Sans perte de généralités, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \ne y_\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = f(x_n)$. L'ensemble $K = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_\infty\}$ est un compact de E_2 donc $f^{-1}(K)$ est un compact de E_1. La suite (x_n) apparaît comme étant une suite d'éléments du compacte $f^{-1}(K)$, on peut donc en extraire une suite convergeant dans la partie

$x_{\varphi(n)} \to x_\infty \in f^{-1}(K)$. De plus $(x_{\varphi(n)})$ étant une suite d'éléments du fermé F, on peut affirmer $x_\infty \in F$. On va maintenant établir $y_\infty = f(x_\infty)$ ce qui permettra de conclure. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $K_N = \{y_n \mid n \geq N\} \cup \{y_\infty\}$. K_N est un compact, $f^{-1}(K_N)$ est donc fermé et par suite $x_\infty \in f^{-1}(K_N)$. Ainsi,

$x_\infty \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} f^{-1}(K_N) = f^{-1}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} K_N\right)$. Or $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} K_N = \{y_\infty\}$ donc

$f(x_\infty) = y_\infty$.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Si E est de dimension finie alors F est fermé car tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé. On en déduit $F = \overline{F}$.

(b) Il suffit de considérer un sous-espace vectoriel dense comme par exemple l'espace des fonctions polynômes de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ dense dans celui des fonctions continues de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ normé par $\|\cdot\|_\infty$.