Exercice 1 [04131] [Correction]
On pose

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\text{ et }u_n=\ln\bigl(\mathrm{e}^{s_n}-1\bigr)$$

(a) Énoncer le théorème des séries spéciales alternées, en faire la preuve.
(b) Prouver que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ convergent.
(c) Étudier la nature de $\sum u_n$.

Exercice 2 [01056] [Correction]
(a) Donner un développement asymptotique à deux termes de

$$u_n=\sum_{p=2}^{n}\frac{\ln p}{p}$$

On pourra introduire la fonction $f\colon t\mapsto(\ln t)/t$.
(b) À l'aide de la constante d'Euler, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$$

Exercice 3 [01083] [Correction]
Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 1}\bigl(\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)\bigr)$$

Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 4 [02430] [Correction]
On note $u_n=\int_0^{\pi/4}(\tan t)^n\,\mathrm{d}t$.
(a) Déterminer la limite de u_n.
(b) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2}.
(c) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.
(d) Discuter suivant $\alpha\in\mathbb{R}$, la nature de la série de terme général u_n/n^α.

Exercice 5 [01325] [Correction]
Soit $j\in\mathbb{N}$. On note Φ_j le plus petit entier $p\in\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\geq j$$

(a) Justifier la définition de Φ_j.
(b) Démontrer que $\Phi_j\xrightarrow[j\to+\infty]{}+\infty$.
(c) Démontrer $\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j}\xrightarrow[j\to+\infty]{}\mathrm{e}$.

Exercice 6 [02433] [Correction]
Soit $\alpha>0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_1>0\text{ et }\forall n\geq 1,u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n^\alpha u_n}$$

(a) Condition nécessaire et suffisante sur α pour que (u_n) converge.
(b) Equivalent de u_n dans le cas où (u_n) diverge.
(c) Equivalent de $(u_n-\ell)$ dans le cas où (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 7 [02429] [Correction]
On fixe $x\in\mathbb{R}_+^*$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n=\frac{n!}{x^n}\prod_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

(a) Étudier la suite de terme général $\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite.
(b) Établir l'existence de $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que la série de terme général :

$$\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

converge.
(c) Établir l'existence de $A\in\mathbb{R}^*$ tel que $u_n\sim An^\alpha$.
(d) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 8 [02423] [Correction]
On pose

$$u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \text{ et } v_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$$

(a) Déterminer la nature de la série de terme général u_n selon α.
(b) Déterminer la nature de la série de terme général v_n selon α.

Exercice 9 [02431] [Correction]
Soit $a > 0, b > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a+bk), B_n = \prod_{k=1}^{n}(a+bk)^{1/n}$$

Trouver $\lim_{n\infty} \frac{B_n}{A_n}$ en fonction de e.

Exercice 10 [02434] [Correction]
Soit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos(x^{1/3})}{x^{2/3}}$$

(a) Nature la série de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$$

(b) Nature de la série de terme général $f(n)$.
(indice : on pourra montrer que $\sin\left(n^{1/3}\right)$ n'admet pas de limite quand $n \to +\infty$
(c) Nature de la série de terme général

$$\frac{\sin(n^{1/3})}{n^{2/3}}$$

Exercice 11 [02432] [Correction]
(a) Étudier $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}$.
(b) Étudier $\sum v_n$ où $v_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}$.

Exercice 12 [02418] [Correction]
Former un développement asymptotique à trois termes de la suite (u_n) définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}$$

Exercice 13 [03917] [Correction]
Soit $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à termes strictement positifs telle que la série $\sum e_n$ converge.
On pose

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n \text{ et } r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

On introduit

$$G = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \mid (d_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

On dit que la suite e est une base discrète lorsque G est un intervalle.

(a) Montrer que G est bien défini. Déterminer son maximum et son minimum.
(b) On suppose dans cette question que (e_n) est une base discrète. Montrer que $e_n \leq r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(c) On suppose que $e_n \leq r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [-s\,;s]$. On définit la suite (t_n) par

$$t_0 = 0 \text{ et } t_{n+1} = \begin{cases} t_n + e_n & \text{si } t_n \leq t \\ t_n - e_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que

$$|t - t_n| \leq e_n + r_n$$

et conclure.
(d) Dans cette question, on suppose $e_n = 1/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer G. Quelles suites (d_n) permettent d'obtenir respectivement $0, 1, 1/2, 2$ et $1/3$?
Pour $x \in G$, y a-t-il une unique suite $(d_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \,?$$

Exercice 14 [00563] [Correction]
Soit (u_n) une suite de réels de $[0\,;1]$ de limite 1.
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in [0\,;1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x + 1 - x)}{2^n}$$

Exercice 15 [03181] [Correction]
Déterminer un équivalent de

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\ln(1-x)}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 16 [02446] [Correction]

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a\,;b],\mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites

$$\left(\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \text{ et } \left(\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

(b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

(on procédera par récurrence)

(c) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

(d) Étudier la limite puis un équivalent de

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 17 [03334] [Correction]
La fonction $x \mapsto \int_0^x \sin(e^t)\,\mathrm{d}t$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 18 [00572] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0\,;+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont intégrables.

(a) Montrer que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

(b) Montrer que $f.f'$ est intégrable.

Exercice 19 [00525] [Correction]
Justifier l'existence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} t\,[1/t]\,\mathrm{d}t$$

Exercice 20 [02424] [Correction]
Convergence et calcul, pour z complexe tel que $|z| < 1$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

Exercice 21 [04104] [Correction]
On étudie l'équation fonctionnelle

$$(E)\colon f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$$

(a) Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?

(b) Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $f(x) = xh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur h, la fonction f est-elle solution de (E) ?

(c) On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $h_0\colon x \mapsto 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Pour $x \in [0\,;1]$, soit $T_x\colon y \mapsto y - xy^2/2$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$ et que $T_x\big([0\,;1]\big) \subset [0\,;1]$.
Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.

(d) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $[0\,;1]$.

(e) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 22 [04186] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

(a) Montrer que $\sum u_n(x)$ converge si $x > 0$.
Montrer que $f\colon x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = \ln x \\ f \text{ est convexe} \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

(c) Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Exercice 23 [04161] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\|$ la norme uniforme sur $[-1\,;1]$.

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de degré n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

(b) Soit P unitaire de degré n. Montrer

$$\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

On pourra s'intéresser aux valeurs de P et T_n en les $\cos(k\pi/n)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Cas d'égalité. Montrer

$$\|P\| = \frac{1}{2^{n-1}} \iff P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$$

Exercice 24 [02411] [Correction]
Soit

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0\,;\pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\}$$

(a) Montrer que

$$N\colon f \mapsto \|f + f''\|_\infty$$

est une norme sur E.

(b) Montrer que N est équivalente à

$$\nu\colon f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$$

Exercice 25 [00465] [Correction]
Soient $E = C^1([0\,;1], \mathbb{R})$ et $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) \,\mathrm{d}t}$$

(a) Montrer que N définit une norme sur E.

(b) Comparer N et $\|.\|_\infty$.

Exercice 26 [02409] [Correction]

(a) Quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application

$$(x, y) \mapsto N_a(x, y) = \sqrt{x^2 + 2axy + y^2}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Si N_a et N_b sont des normes, calculer

$$\inf_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} \text{ et } \sup_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$$

Exercice 27 [00477] [Correction]
Soit E un espace vectoriel réel normé. On pose

$$f(x) = \frac{1}{\max(1, \|x\|)} x$$

Montrer que f est 2-lipschitzienne.
Montrer que si la norme sur E est hilbertienne alors f est 1-lipschitzienne.

Exercice 28 [00750] [Correction]
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.

(a) Calculer $\det \widetilde{A}$.

(b) Étudier le rang de $\widetilde{A}$.

(c) Montrer que si A et B sont semblables alors $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ le sont aussi.

(d) Calculer $\widetilde{\widetilde{A}}$.

Exercice 29 [01108] [Correction]
On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
$A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$,
$C = \{\text{suites convergentes}\}$,
$D = \left\{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\right\}$ et $E = \{\text{suites périodiques}\}$.

Exercice 30 [03285] [Correction]
Soient E un espace normé de dimension quelconque et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k$$

(a) Simplifier $v_n \circ (u - \mathrm{Id})$.

(b) Montrer que

$$\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \cap \ker(u-\mathrm{Id}) = \{0\}$$

(c) On suppose E de dimension finie, établir

$$\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \oplus \ker(u-\mathrm{Id}) = E$$

(d) On suppose de nouveau E de dimension quelconque.
Montrer que si

$$\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \oplus \ker(u-\mathrm{Id}) = E$$

alors la suite (v_n) converge simplement et l'espace $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$ est une partie fermée de E.

(e) Étudier la réciproque.

Exercice 31 [02415] [Correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel il existe un et un seul $y \in A$ tel que $|x-y| = d(x,A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Exercice 32 [04103] [Correction]
E désigne un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E.

(a) Soit $x \in E$ et $r > 0$. Justifier que la boule $B_f(x,r)$ est compacte. Que dire de $f(B_f(x,r))$?

(b) Soit $x \in E$ et un réel r tel que $0 < r < \|x\|$. On note $K = B_f(x,r)$ et on suppose $f(K) \subset K$.
On fixe $a \in K$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)$$

Justifier que $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de K et que $f(y_n) - y_n$ tend vers 0_E. En déduire qu'il existe un vecteur $w \in K$ tel que $f(w) = w$.

(c) On reprend les notations précédentes et on suppose toujours $f(K) \subset K$.
Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}\, f$ et $\mathrm{Sp}\, f \subset [-1;1]$.

(d) À l'aide d'un exemple choisi en dimension 3, montrer que f n'est pas nécessairement diagonalisable.

(e) Dans cette dernière question, on choisit $\dim E = 3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base orthonormée de E et

$$K = \left\{x.e_1 + y.e_2 + z.e_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\} \text{ (avec } a,b,c > 0)$$

On suppose $f(K) = K$. Montrer que 1 ou -1 est valeur propre de f.

Exercice 33 [04106] [Correction]
On considère une série entière complexe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
On note f sa somme définie pour $|z| < R$ par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

(a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur le disque $D(0,r) = \{z\in\mathbb{C}, |z|\leq r\}$ si $0<r<R$.

(b) Soit r un réel tel que $0<r<R$, montrer que la fonction

$$z\mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Im}\left(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

est développable en série entière et exprimer la somme de cette série entière en fonction de $f(z)$ et de $f(0)$.

(c) Déterminer les fonctions f, développables en série entière sur $D(0,R)$, et qui ne prennent que des valeurs réelles sur un ensemble de la forme $\{z\in\mathbb{C}, |z| = r\}$ pour $0<r<R$.

Exercice 34 [03303] [Correction]

Soit $f\colon]-R\,;R[\to\mathbb{R}$ (avec $R>0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in [0\,;R[, f^{(n)}(x)\geq 0$$

Montrer la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$$

pour tout $x\in]-R\,;R[$.

Exercice 35 [02451] [Correction]

On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1\,;n]\!]$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n) = N(n,0)$, puis

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$$

(a) relier $N(n,p)$ et $D(n-p)$.

(b) Justifier la définition de f sur $]-1\,;1[$ puis calculer f.

(c) Calculer $N(n,p)$.

(d) Étudier la limite de $\left(\frac{1}{n!}N(n,p)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 36 [03244] [Correction]

Soit f la fonction somme dans le domaine réel d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R=1$.

On suppose l'existence d'un réel

$$\ell = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

(a) Peut-on affirmer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ ?

(b) Que dire si l'on sait de plus $a_n = \mathrm{o}(1/n)$? [Théorème de Tauber]

Exercice 37 [02452] [Correction]

Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = \mathrm{o}(p_n)$. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}$$

(a) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$ et étudier la limite de $(1-x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

(b) Ici $p_n = n^q$ avec $q\in\mathbb{N}$ et $q\geq 2$. Donner un équivalent simple de f en 1.

Exercice 38 [02483] [Correction]

Soit $\alpha > -1$.

(a) Donner le rayon de convergence R de

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$$

On désire trouver un équivalent de f_α lorsque $x\to R^-$.

(b) On suppose que α est un entier p.

Calculer f_0, f_1. Donner avec un logiciel de calcul formel l'expression de $f_2,\dots,f_5$.

Trouver les équivalents recherchés.

Montrer qu'il existe $Q_p\in\mathbb{R}[X]$ tel que

$$f_p(x) = \frac{Q_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

(on calculera f_p'). En déduire l'équivalent recherché.

(c) On suppose $\alpha > -1$ quelconque.
Donner le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)^{1+\alpha}}$$

On notera b_n ses coefficients.
Montrer qu'il existe $A(\alpha) > 0$ tel que $n^\alpha \sim A(\alpha)b_n$. On étudiera la nature de la série de terme général

$$\ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln\frac{n^\alpha}{b_n}$$

En déduire que $f_\alpha(x)$ est équivalente à

$$\frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$$

quand x tend vers R^-.

Exercice 39 [03302] [Correction]
Établir que la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-\operatorname{sh} x}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

Exercice 40 [00995] [Correction]
Réaliser le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 41 [02448] [Correction]
Pour $n > 0$, on pose

$$a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \,\mathrm{d}t$$

(a) Trouver la limite de (a_n).

(b) Trouver une relation simple entre a_{n+2} et a_n.

(c) On pose

$$u_n(x) = \frac{a_n}{n^\alpha}x^n$$

Donner la nature de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x et de α.

(d) On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 42 [02449] [Correction]
Soit (a_n) la suite définie par

$$a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\,\mathrm{d}t \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

(a) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

(b) Somme de $\sum a_n x^n$.

Exercice 43 [03989] [Correction]
On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$$

(a) Déterminer les rayons de convergence de f et de g.

(b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1\,;1[$.

(c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in \,]-1\,;1[$.

(d) Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $[-1\,;1[$.

(e) Trouver des équivalents de f et g en 1.

Exercice 44 [03201] [Correction]
Soit

$$f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$$

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

(b) Étudier la convergence en $-R$ et en R.

(c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

(d) Montrer que quand $x \to 1^-$

$$(1-x)f(x) \to 0$$

Exercice 45 [03074] [Correction]
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière
$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n$$
On pose donc, pour t dans $\mathbb{R}$,
$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

(b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x > r$, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer cette intégrale sous forme de série entière en $1/x$.

Exercice 46 [03890] [Correction]

(a) Donner l'intervalle de définition I de la fonction s qui au réel x associe
$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

(b) Quel est le signe de s' sur $I \cap \mathbb{R}_+$?
Quelle est la limite de s en l'extrémité droite de $I \cap \mathbb{R}_+$?

(c) Écrire $(1-x)s'(x)$ sous forme d'une série et en déduire le signe de s' sur I.

(d) Étudier la convexité de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(x) = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) x$$
En déduire que la fonction s est convexe.

Exercice 47 [02520] [Correction]
Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{z}{2^k}\right)$$

(a) Montrer que $|P_n(z)| \le P_n(-|z|)$.
En déduire que la suite $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Indice : on pourra penser à introduire $\ln P_n(-|z|)$.

(b) En étudiant la convergence de la série $\sum (P_{n+1}(z) - P_n(z))$, établir la convergence de la suite $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$.
On introduit la fonction
$$f\colon z \mapsto \lim_{n\to+\infty} P_n(z)$$

(c) Montrer que f est continue en 0.

(d) Montrer que f est l'unique fonction continue en 0 vérifiant
$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (1-z)f(z/2) \text{ et } f(0) = 1$$

(e) Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 48 [03483] [Correction]
Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière
$$\sum_{n\ge1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$$

(a) Démontrer que $R_\alpha \le 1$.

(b) On considère la suite $(u_n)_{n\ge1}$ définie par
$$u_1 = 2 \text{ et } \forall n \ge 1, u_{n+1} = (u_n)^{u_n}$$
Démontrer que pour tout entier $n \ge 1$
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \le \frac{1}{(n+1)^n}$$
En déduire que la série de terme général $1/u_n$ converge.
Dans la suite, on pose
$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$
et on admet que α est irrationnel.

(c) Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout entier $n \ge 1$:
$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \le \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$

(d) Démontrer que $R_\alpha = 0$.

(e) Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.
Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 49 [04158] [Correction]

(a) Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivable sur un intervalle soit strictement croissante.

(b) Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}_+$ continue dont l'ensemble des zéros est d'intérieur vide et $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a\,;b]$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) Soit $g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}_+$ continue. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Exercice 50 [04159] [Correction]

Soit a et b strictement positifs. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite, notée $M(a, b)$.

(b) On pose

$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}$$

Montrer

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a,b)$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$.

(c) Montrer

$$T(a,b) = \frac{\pi}{M(a,b)}$$

Exercice 51 [00926] [Correction]

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 52 [00939] [Correction]

Soient $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$$

(a) Nature de la série de terme général $u_n(1)$.

(b) Plus généralement, nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$.

(c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2, 3$.

Exercice 53 [00554] [Correction]

Existence et calcul de

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

sachant $g(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 54 [02439] [Correction]

Soient $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - a}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 55 [02438] [Correction]

(a) Démontrer la convergence de la série de terme général

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

(b) Comparer

$$a_n \text{ et } n\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

(c) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{(1 - t\mathrm{e}^{-t})^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 56 [02445] [Correction]
On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

pour tout entier $n > 0$.

(a) Trouver la limite ℓ de (I_n).

(b) Donner un équivalent de $(\ell - I_n)$.

(c) Justifier

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

(d) Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n).

Exercice 57 [03211] [Correction]
On considère

$$\varphi\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer la définie et la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(c) Montrer que pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \to 0^+$.

(d) La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 58 [03736] [Correction]
On pose

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}$$

(a) Étudier l'ensemble de définition de f.

(b) Donner un équivalent de f en 0.

(c) Montrer que le graphe de f admet une symétrie d'axe $x = 1/2$.

(d) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

(e) Calculer la borne inférieure de f.
Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 59 [03387] [Correction]
On considère l'équation différentielle

$$(E)\colon y'' + \cos^2(t)y = 0$$

(a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

(b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max\{t < 0 \mid u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min\{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$

(d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u.
En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans$]\gamma\,;\delta[$.

(e) Soit w une solution non nulle de (E). Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$

[Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 60 [03920] [Correction]
Soient $q \in \mathcal{C}^0\left([a\,;+\infty[, \mathbb{R}_+\right)$ et (E) l'équation différentielle $y'' = q(x)y$.

(a) Soit f une solution de (E) telle que $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$.
Montrer que f et f' sont strictement positives et que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

(b) Soient u et v les solutions de (E) telles que

$$\begin{cases} u(a) = 1 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(a) = 1 \end{cases}$$

Calculer $u'v - uv'$. Montrer que, sur $]a\,;+\infty[$, u/v et u'/v' sont monotones de monotonies contraires. Montrer que u/v et u'/v' tendent en $+\infty$ vers la même limite réelle.

(c) Montrer qu'il existe une unique solution g de (E), strictement positive, telle que $g(a) = 1$ et telle que g décroisse sur $[a\,;+\infty[$.

(d) Déterminer g lorsque $q(x) = 1/x^4$ sur $[1\,;+\infty[$.
On pourra poser $y(x) = xz(1/x)$.

Exercice 61 [02455] [Correction]

(a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt)$$

(b) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 62 [00105] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et g une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = f(x)$$

(a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. Déterminer une condition nécessaire sur $f'(0)$ pour que la fonction ainsi prolongée soit dérivable en 0. Démontrer que cette condition n'est pas suffisante.

(b) f est supposée de classe $\mathcal{C}^2$ et la condition précédente est vérifiée.
Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 63 [00506] [Correction]
Soit (E) l'équation différentielle

$$(\ln x)y' + \frac{y}{x} = 1$$

(a) Résoudre (E) sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

(b) Soit g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[\setminus\{0\}$ par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Montrer que g se prolonge sur $]-1\,;+\infty[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Démontrer que (E) admet une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 64 [02416] [Correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \exp(A+B)$$

Exercice 65 [03921] [Correction]

(a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Montrer que $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est une famille libre.
Exprimer

$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n + N)}$$

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant pour unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.
Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, λ est imaginaire pur et $A = \lambda I_n$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$(X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_m)^{n_m}$$

les λ_k étant deux à deux distincts. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker(f - \lambda_k \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

En déduire l'existence d'une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.

(d) Avec les notations de c). Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et que A est diagonalisable.

(e) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 66 [02466] [Correction]
On considère
$$f\colon (x,y)\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+y^{2n}}$$
(a) Déterminer le domaine de définition D de f.
(b) Étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D.

Exercice 67 [02460] [Correction]
On pose
$$\varphi(x,y)=\frac{\cos x-\cos y}{x-y}\text{ pour }x\neq y$$
(a) Montrer que φ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}^2$ noté encore φ.
(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 68 [01327] [Correction]
Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que
$$F\colon\begin{cases}\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\\ (x_1,\dots x_n)\mapsto f\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)\end{cases}$$
vérifie
$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2F}{\partial x_i^2}=0$$

Exercice 69 [02463] [Correction]
Déterminer les extremums de $x^{\ln x}+y^{\ln y}$ sur $]0\,;+\infty[^2$.

Exercice 70 [02465] [Correction]
Soit un triangle ABC et M parcourant l'intérieur de ce triangle. On veut déterminer en quelle position le produit des 3 distances de M à chacun des côtés du triangle est maximal.
Indications : ne pas oublier de justifier l'existence de ce maximum, la réponse est le centre de gravité du triangle.

Exercice 71 [00070] [Correction]
Soit $a>0$. Montrer que
$$f\colon(x,y)\mapsto x+y+\frac{a}{xy}$$
admet un minimum strict sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Exercice 72 [02461] [Correction]
Montrer que $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré p si, et seulement si,
$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=pf(x_1,\dots,x_n)$$

Exercice 73 [03502] [Correction]
Soient $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, E^* le dual de E et
$$\mathcal{D}=\left\{d\in E^*\mid\forall(f,g)\in E^2,d(fg)=f(0)d(g)+g(0)d(f)\right\}$$
(a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de E^*.
(b) Montrer que $\mathcal{D}$ est non réduit à $\{0\}$.
(c) Soit $d\in\mathcal{D}$ et h une fonction constante. Que vaut $d(h)$?
(d) Soit $f\in E$. Montrer
$$\forall x\in\mathbb{R}^n,f(x)=f(0)+\sum_{i=1}^n x_i\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$$
Vérifier que l'application $x\mapsto\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$ est dans E.
(e) Soit $d\in\mathcal{D}$. Établir l'existence de $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que
$$\forall f\in E,d(f)=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$
(f) Déterminer la dimension de $\mathcal{D}$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Si (v_n) est une suite alternée dont la valeur absolue décroît vers 0 alors la série $\sum v_n$ converge.
Ce résultat s'obtient en constatant l'adjacence des suites extraites de rangs pairs et impairs de la suite des sommes partielles.

(b) La suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge en vertu du critère spécial énoncé ci-dessus. En fait, il est « connu » que $(s_n)_{n\geq 1}$ tend vers $\ln 2$ et donc $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

(c) On peut écrire

$$s_n = \ln 2 - r_n$$

avec

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

On a

$$r_n - r_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } r_n + r_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

car par, application du critère spécial à la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$, on peut majorer le reste par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. On en déduit

$$r_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On sait

$$\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x - 1 + \mathrm{O}\left((x-1)^2\right)$$

et donc

$$u_n = \mathrm{e}^{s_n} - 2 + \mathrm{O}\left((\mathrm{e}^{s_n} - 2)^2\right)$$

avec

$$\mathrm{e}^{s_n} - 2 = 2\left(\mathrm{e}^{-r_n} - 1\right) = -2r_n + \mathrm{O}\left(r_n^2\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum u_n$ converge car c'est la somme d'une série vérifiant le critère spécial et d'une autre absolument convergente.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) f est décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$. Pour $p \geq 4$,

$$\int_p^{p+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{\ln p}{p} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc $u_n = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + v_n$ avec

$$\int_4^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leq v_n \leq \int_3^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc $v_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2$.
Étudions $w_n = u_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2$, $w_n - w_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leq 0$ donc (w_n) est décroissante.
D'autre part les calculs précédents donnent (w_n) minorée et donc on peut conclure que w_n converge. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\ln n\right)^2 + C + \mathrm{o}(1)$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(2n)}{2n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(2n-1)}{2n-1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(2n)}{n} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{\ln(n)}{n} = \ln 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + u_N - u_{2N}$$

Par le développement asymptotique précédent, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \ln 2 . \ln n + \ln(2)\gamma + \frac{1}{2}(\ln n)^2 + C - \frac{1}{2}(\ln 2n)^2 - C + \mathrm{o}(1)$$

et après simplification

$$\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \to \frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{2N+1} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}(1) \to \frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma - \ln 2)$$

donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2)$$
N'est-ce pas magnifique ?

Exercice 3 : [énoncé]
On a
$$\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=(1+a+b)\ln n+\frac{a+2b}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Il y a convergence si, et seulement si, $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ ce qui correspond à $a=-2$ et $b=1$.
Dans ce cas :
$$\sum_{n=1}^{N}\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=\sum_{n=1}^{N}\ln n-2\sum_{n=2}^{N+1}\ln n+\sum_{n=3}^{N+2}\ln n$$
puis
$$\sum_{n=1}^{N}\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=\ln 1+\ln 2-2\ln 2-2\ln(N+1)+\ln(N+1)+\ln(N+2)\to-\ln 2$$

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi\colon t\mapsto 1$, on obtient $u_n\to 0$.

(b)
$$u_n+u_{n+2}=\int_0^{\pi/4}(\tan t)'(\tan t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$$

(c) On vérifie aisément $u_n\to 0^+$ et $u_{n+1}\le u_n$. Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum(-1)^n u_n$ converge.

(d) Par monotonie
$$u_n+u_{n+2}\le 2u_n\le u_n+u_{n-2}$$
On en déduit $u_n\sim\frac{1}{2n}$ puis par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\frac{u_n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha>0$.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Puisque
$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\xrightarrow[p\to+\infty]{}+\infty$$
on peut affirmer que l'ensemble
$$\left\{p\in\mathbb{N},\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\ge j\right\}$$
est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Celle admet donc un plus petit élément, noté Φ_j.

(b) Par définition de Φ_j, on a
$$j\le\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}$$
Or, par comparaison avec une intégrale
$$\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}\le 1+\int_1^{\Phi_j}\frac{\mathrm{d}t}{t}=1+\ln\Phi_j$$
On en déduit $\Phi_j\ge\mathrm{e}^{j-1}$ puis $\Phi_j\xrightarrow[j\to+\infty]{}+\infty$.

(c) Par définition de Φ_j, on a
$$\sum_{n=1}^{\Phi_j-1}\frac{1}{n}\le j\le\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}$$
Or, sachant que $\Phi_j\to+\infty$, on a
$$\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}=\ln\Phi_j+\gamma+\mathrm{o}(1)\text{ et }\sum_{n=1}^{\Phi_j-1}\frac{1}{n}=\ln(\Phi_j-1)+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
Par suite
$$\ln(\Phi_j-1)+\gamma+\mathrm{o}(1)\le j\le\ln\Phi_j+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
Or
$$\ln(\Phi_j-1)=\ln\Phi_j+\mathrm{o}(1)$$
donc
$$j=\ln\Phi_j+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
puis
$$\Phi_j=\mathrm{e}^{j-\gamma+\mathrm{o}(1)}$$

On en déduit
$$\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j}=\frac{\mathrm{e}^{j+1-\gamma+\mathrm{o}(1)}}{\mathrm{e}^{j-\gamma+\mathrm{o}(1)}}=\mathrm{e}^{1+\mathrm{o}(1)}\to\mathrm{e}$$

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Notons la suite (u_n) est bien définie, strictement positive et croissante.
Si $\alpha>1$, on a
$$u_{n+1}\leq u_n+\frac{1}{n^\alpha u_1}$$
puis par récurrence
$$u_n\leq\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^\alpha u_1}$$
Ainsi (u_n) converge.
Si (u_n) converge. Posons $\ell=\lim u_n$, on observe $\ell>0$. On a
$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n^\alpha u_n}\sim\frac{1}{n^\alpha\ell}$$
or la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ est convergente donc $\alpha>1$.

(b) On suppose $\alpha\leq 1$. On a
$$u_{n+1}^2-u_n^2=\frac{2}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2}\sim\frac{2}{n^\alpha}$$
donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs divergentes
$$u_n^2\sim 2\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^\alpha}$$
or par comparaison série-intégrale,
$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^\alpha}\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\text{ quand }\alpha<1$$
et
$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\sim\ln n\text{ quand }\alpha=1$$
On conclut alors
$$u_n\sim\sqrt{\frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\text{ si }\alpha<1\text{ et }u_n\sim\sqrt{2\ln n}\text{ si }\alpha=1$$

(c) On suppose $\alpha>1$. Posons $v_n=u_n-\ell$. On a
$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n^\alpha u_n}\sim\frac{1}{n^\alpha\ell}$$
donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs convergentes
$$\sum_{k=n}^{+\infty}v_{k+1}-v_k=-v_n\sim\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{\ell n^\alpha}\sim\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$
puis
$$v_n=\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$

Exercice 7 : [énoncé]

(a)
$$\ln u_{n+1}-\ln u_n\sim-\frac{1}{2}\frac{x}{n}$$
avec $x>0$ donc
$$\sum_{k=1}^n\ln u_{k+1}-\ln u_k\to-\infty$$
puis $u_n\to 0$.

(b) Pour $\alpha=-x/2$,
$$\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc il y a convergence de
$$\sum\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(c) Puisque
$$\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{u_{n+1}}{(n+1)^\alpha}-\ln\frac{u_n}{n^\alpha}$$
la suite de terme général $\ln\frac{u_n}{n^\alpha}$ converge puis $\frac{u_n}{n^\alpha}\to A$ avec $A>0$.

(d) Par comparaison de séries à termes positifs,$\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha<-1$ *i.e.* $x>2$.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Pour définir u_n, il est nécessaire de supposer $\alpha > 1$.
Par comparaison avec une intégrale, on montre

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(b) Pour définir u_n, il est nécessaire de supposer $\alpha > 0$.
Par application du critère spécial des séries alternées, v_n étant le reste de la série $\sum \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$ est du signe de $(-1)^n$ et $|v_n| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \to 0$.
De plus

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p+n+1)^\alpha} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(p+n+2)^\alpha}$$

donc

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha}\right)$$

Par le théorème des accroissements finis

$$\frac{1}{(p+n+2)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+1)^\alpha} = -\frac{\alpha}{(c_n)^{\alpha+1}}$$

avec $c_n \in \left]p+n+1\,;p+n+2\right[$.
La suite (c_n) est croissante donc on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à

$$\sum(-1)^p\left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha}\right)$$

et conclure que sa somme est du signe de son premier terme. Au final, $(|v_n|)$ est décroissant et en appliquant une dernière fois le critère spécial des séries alternées, on conclut que $\sum v_n$ converge.

Exercice 9 : [énoncé]

On a

$$A_n = a + \frac{b(n+1)}{2}, \ln B_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(a+bk)$$

Posons $f(t) = \ln(a+bt)$ fonction croissante.

À l'aide d'une comparaison série-intégrale

$$\sum_{k=1}^n f(k) = n\ln(a+bn) - n + \mathrm{o}(n)$$

donc

$$\ln\frac{B_n}{A_n} = \ln B_n - \ln A_n = \ln\left(\frac{a+bn}{a+bn/2}\right) - 1 + \mathrm{o}(1) \to \ln 2 - 1$$

puis

$$\frac{B_n}{A_n} \to \frac{2}{\mathrm{e}}$$

Exercice 10 : [énoncé]

(a) a) Une comparaison série intégrale est inadaptée, f n'est pas monotone comme en témoigne ses changements de signe. En revanche :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) - f(n)\,\mathrm{d}x$$

Or par le théorème des accroissements fini,

$$f(x) - f(n) = f'(c_x)(x-n)$$

avec $c_x \in \left]n\,;x\right[$.
Après calcul de $f'(x)$, on en déduit

$$|f(x) - f(n)| \leq \frac{1}{3n^{4/3}} + \frac{2}{3n^{5/3}}$$

puis $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$.

(b) La série de terme général $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge car $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = 3\sin(n^{1/3})$ diverge. En effet si $\sin\left(n^{1/3}\right)$ convergeait vers ℓ alors par extraction $\sin(n)$ aussi et il est classique d'établir la divergence de $(\sin(n))$. On en déduit que $\sum \frac{\cos(n^{1/3})}{n^{2/3}}$ diverge.

(c) Il suffit de reprendre la même étude pour parvenir à la même$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$ conclusion.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) L'intégrale définissant u_n est bien définie car elle porte sur une fonction sur le segment $[0\,;1]$. On peut aussi la comprendre comme une intégrale impropre convergente sur $[0\,;1[$

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n} = \int_{[0;1[} \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}$$

et par sommation géométrique

$$\int_{[0;1[} \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n} = \int_{[0;1[} \frac{1-x}{1-x^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Posons

$$f_n(x) = \frac{1-x}{1-x^{n+1}}$$

Sur $[0\,;1[$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f\colon x \mapsto 1-x$.
Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$\left|\frac{1-x}{1-x^{n+1}}\right| \le \frac{1-x}{1-x} = 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par convergence dominée

$$u_n \to \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

et donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(b) On amorce les calculs comme au dessus pour écrire

$$v_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\,\mathrm{d}x$$

Par intégration par parties impropre justifiée par deux convergences

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n+1}\ln(1-x^{n+1})(1-x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})\,\mathrm{d}x$$

Le terme entre crochet est nul (il suffit d'écrire $x = 1-h$ avec $h \to 0$, pour étudier la limite en 1)
Il reste

$$v_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})\,\mathrm{d}x$$

Par développement en série entière de la fonction $u \mapsto -\ln(1-u)$

$$v_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^{(n+1)k}\,\mathrm{d}x$$

Posons

$$g_k(x) = \frac{1}{k}x^{(n+1)k}$$

La série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement sur $[0\,;1[$ en vertu de la décomposition en série entière précédente.
Les fonctions g_k et la fonction somme $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k\colon x \mapsto -\ln(1-x^{n+1})$ sont continues par morceaux.
Enfin, les fonctions g_k sont intégrables sur $[0\,;1[$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left|\frac{1}{k}x^{(n+1)k}\right|\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} < +\infty$$

On peut donc intégrer terme à terme pour écrire
donc

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\int_0^1 x^{(n+1)k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} \le \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

puis finalement

$$v_n \le \frac{C}{(n+1)^2}$$

La série à termes positifs $\sum v_n$ est donc convergente.

Exercice 12 : [énoncé]
On observe que $u_{n+1}^n - u_n^{n-1} = n$.
Puisque $\sum n$ une série à termes positifs divergente on peut, par sommation de relation de comparaison, affirmer

$$u_{n+1}^n \sim \sum_{k=1}^n k \sim \frac{1}{2}n^2$$

En composant avec le logarithme népérien cet équivalent de limite infini, on obtient
$$n \ln u_{n+1} \sim 2 \ln n$$
puis
$$\ln u_{n+1} \sim 2\frac{\ln n}{n}$$
Par suite $u_{n+1} \to 1$ puis
$$u_{n+1} = 1 + 2\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$
Posons
$$v_n = u_{n+1} - 1 - 2\frac{\ln n}{n}$$
L'égalité
$$u_{n+1}^n = \exp\left(n \ln\left(1 + 2\frac{\ln n}{n} + v_n\right)\right)$$
donne
$$u_{n+1}^n = \exp\left(2\ln n + nv_n + \mathrm{O}\left((\ln n)^2/n\right)\right)$$
Or $\frac{2u_{n+1}^n}{n^2} \to 1$ donc
$$\exp\left(\ln(2) + nv_n + \mathrm{O}\left((\ln n)^2/n\right)\right) \to 1$$
puis $nv_n \to -\ln(2)$. Ainsi
$$u_{n+1} = 1 + 2\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Puisque $|d_n e_n| \le e_n$ avec convergence de $\sum e_n$, on peut affirmer que les éléments de G sont des sommes de séries absolument convergentes. Les éléments de G sont donc bien définis et puisque
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} e_n = s$$
on a $G \subset [-s\,;s]$. Enfin $s \in G$ avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $-s \in G$ avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Si e est une base discrète alors $G = [-s\,;s]$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $e_N > r_N$.
Introduisons
$$x = \sum_{k=0}^{N-1} e_k \in [-s\,;s]$$
(comprendre $x = 0$ si $N = 0$).
Soit
$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \text{ avec } d_n \in \{-1, 1\}$$
S'il existe $k \le N$ tel que $d_k = -1$ alors
$$y \le \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n - 2e_k = s - 2e_k$$
Or
$$e_k \ge e_N$$
donc
$$y < s - 2e_N = x + r_N - e_N < x$$
Si $d_k = 1$ pour tout $k \le N$ alors
$$y = \sum_{n=0}^{N} e_k + \sum_{n=N+1}^{+\infty} d_k e_k \ge x + e_N - r_N > x$$
Dans tous les cas, $y \ne x$ et donc $x \notin G$. C'est absurde.

(c) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Cas $n = 0$: on a bien
$$|t - t_0| = |t| \le s = e_0 + r_0$$
Supposons la propriété vérifiée au rang $n \ge 0$.
Si $t_n \le t$ alors
$$t - t_{n+1} = t - t_n - e_n \le r_n$$
et
$$t - t_{n+1} \ge -e_n \ge -r_n$$
Ainsi
$$|t - t_{n+1}| \le r_n = e_{n+1} + r_{n+1}$$
Si $t_n > t$ alors
$$t_{n+1} - t = t_n - t - e_n$$

et l'étude est analogue.
Récurrence établie.
On en déduit que $t_n \to t$ puis que $t \in G$.
En conclusion

$$e \text{ est une base discrète si, et seulement si, } \forall n \in \mathbb{N}, e_n \leq r_n$$

(d) La condition précédente est vérifiée et, puisque $s = 2$, on obtient $G = [-2\,;2]$.
On peut écrire

$$0 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)\frac{1}{2^n}, 1 = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

et

$$2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

En remarquant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

on peut proposer

$$\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$$

Il peut y avoir unicité de la suite (d_n) (c'est le cas pour $x = s$) ou non (c'est le cas pour $x = 0$ où lorsque (d_n) convient, $(-d_n)$ convient aussi).

Exercice 14 : [énoncé]
Soit f une fonction solution. Puisque celle-ci est continue sur un segment, elle y admet un minimum en un certain $x_0 \in [0\,;1]$.
On a alors

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x_0 + 1 - x_0)}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x_0)}{2^n} = f(x_0)$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n x_0 + 1 - x_0) = f(x_0)$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$f(1) = f(x_0)$$

Ainsi $f(1)$ est la valeur minimale de f sur $[0\,;1]$
Un raisonnement symétrique assure aussi que $f(1)$ est la valeur maximale de f sur $[0\,;1]$.
On en déduit que f est constante.
La réciproque est immédiate.

Exercice 15 : [énoncé]
Posons $f\colon]0\,;1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

prolongée par continuité en 0.
Notons que cette fonction est positive et croissante.
Introduisons $a, b \in]0\,;1[$ dont les valeurs seront déterminées ultérieurement. On peut écrire

$$-(n+1)I_n = A_n + B_n + C_n$$

avec

$$A_n = \int_0^a (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x, B_n = \int_a^b (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x \text{ et } C_n = \int_b^1 (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

Par monotonie de f,

$$0 \leq A_n \leq \int_0^a \frac{(n+1)x^n}{f(0)} = a^{n+1}$$

Pour $a = 1 - \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{n} \to 0$, on a

$$\ln(n)a^{n+1} = \mathrm{e}^{\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n)} \to 0$$

car

$$\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n) \sim -\ln n \to -\infty$$

On en déduit

$$A_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Par la croissance de f

$$0 \leq C_n \leq \int_b^1 \frac{(n+1)x^n}{f(b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1-b^{n+1}}{f(b)}$$

Pour $b = 1 - \eta_n$ avec $\eta_n = \frac{1}{n(\ln n)} \to 0$, on a

$$b^{n+1} \to 1 \text{ et } f(b) \sim \ln n$$

de sorte que

$$C_n \sim o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

Enfin, toujours par la croissance de f,

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{f(b)} \leq B_n \leq \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{f(a)}$$

et puisque

$$b^{n+1}-a^{n+1} \to 1 \text{ et } f(b) \sim f(a) \sim \ln n$$

on parvient à

$$-(n+1)I_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

et finalement

$$I_n \sim -\frac{1}{n\ln n}$$

Remarque :
Par le changement de variable $t = -\ln(1-x)$, $x = 1-\mathrm{e}^{-t}$

$$I_n = -\int_0^{+\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^{-t})^{n+1}}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

En développant par la formule du binôme

$$I_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{-\mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

On ne peut pas linéariser car les intégrales divergent en 0. On exploite

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = 0$$

pour introduire un 0 faisant converger les intégrales et permettant de linéariser

$$I_n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

On peut alors montrer par découpage d'intégrale et un changement de variable affine que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(k+1)$$

Ce qui précède permet alors d'établir

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \ln(k+1) \sim -\frac{1}{n\ln n}$$

Exercice 16 : [énoncé]

(a) 0, cf. lemme de Lebesgue.

(b) Posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégrale existe car un prolongement par continuité est possible en 0.
On observe

$$\sin(2(n+1)t) - \sin(2nt) = 2\sin t\cos(2n+1)t$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} 2\cos((2n+1)t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

La suite (I_n) est constante égale à

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

(c) On a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt)f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$f(t) = \cot t - \frac{1}{t}$$

qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$.
Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{2}$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

donc la convergence de l'intégrale de Dirichlet étant supposée connue, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

(d) On a

$$\int_0^{\pi/2}\ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/2}\ln(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2}\ln(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{\ln(\pi/2)\sin(n\pi/2)}{n}-\frac{1}{n}\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$

La fonction $t\mapsto\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,;\pi/2]$.
Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)\sin(n\pi/2)-\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t\mapsto\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$, on a

$$\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'\sin(nt)\,\mathrm{d}t=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2}\ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t\sim\frac{(\ln 2)\sin(n\pi/2)-\pi}{2n}$$

Exercice 17 : [énoncé]
Par intégration par parties

$$\int_0^x\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\mathrm{e}^t\sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\left[-\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x-\int_0^x\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

D'une part

$$\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

et d'autre part $t\mapsto\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty]$ car

$$t^2\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) On a

$$f'(x)=f'(0)+\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $f'(x)$ admet une limite finie ℓ quand $x\to+\infty$.
Si $\ell>0$ alors pour x assez grand $f'(x)\geq\ell/2$ puis $f(x)\geq\ell x/2+m$ ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si $\ell<0$ on obtient aussi une absurdité. Il reste donc $\ell=0$.

(b) Puisque la fonction f' est continue et converge en $+\infty$, cette fonction est bornée et donc $t\mapsto f(t)f'(t)$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 19 : [énoncé]
La fonction $f\colon t\mapsto t\,[1/t]$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $t>1$, $[1/t]=0$ et donc $f(t)=0$. Ainsi f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
Pour $t>0$, $1/t-1\leq[1/t]\leq1/t$ et donc $f(t)\xrightarrow[t\to0^+]{}1$. Ainsi f est intégrable sur $]0\,;1]$.
On a

$$I=\lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k}t\,[1/t]\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k}kt\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k(k+1)^2}$$

Par décomposition en éléments simples

$$\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

et après réorganisation

$$\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

On en déduit

$$I=\frac{\pi^2}{12}$$

Exercice 20 : [énoncé]
Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n,k \in \mathbb{N}$$

On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m\in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Si f est constante égale à C alors l'équation (E) est vérifiée si, et seulement si, $C = 2C - 2C^2$. Cette dernière équation est vérifiée pour $C = 0$ et $C = 1/2$ seulement.

(b) Après substitution et étude séparée du cas $x = 0$, on obtient f solution de (E) si, et seulement si, h vérifie

$$h(2x) = h(x) - xh(x)^2$$

(c) L'application T_x est de classe $\mathcal{C}^1$ et $T_x'(y) = 1 - xy$. Sur $[0\,;1]$, on vérifie $|T_x'(y)| \leq 1$ et la fonction T_x est donc 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$. Au surplus, la fonction T_x est croissante sur $[0\,;1]$ avec $T_x(0) = 0$ et $T_x(1) = 1 - x/2$. On en déduit $T_x([0\,;1]) \subset [0\,;1]$.

Par une récurrence immédiate, on vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;1], h_n(x) \in [0\,;1]$$

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0\,;1]$, on a par lipschitzianité

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left|h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

En répétant cette majoration

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \frac{x}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

La série télescopique $\sum h_{n+1}(x) - h_n(x)$ converge donc absolument et la suite $(h_n(x))$ est donc convergente. La suite de fonctions (h_n) converge donc simplement vers une fonction h. Au surplus

$$|h(x) - h_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La convergence de la suite (h_n) est donc uniforme sur $[0\,;1]$.

(d) La fonction h est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue sur $[0\,;1]$. En passant à la limite la relation

$$\forall x \in [0\,;1], h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

on obtient l'identité

$$\forall x \in [0\,;1], h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Puisque $h_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h(0) = 1$ et la fonction h n'est pas nulle. On peut alors définir la fonction $f\colon x \mapsto xh(x)$ qui est continue, non constante et vérifie

$$\forall x \in [0\,;1], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

(e) On peut ensuite définir une solution sur $[0\,;2]$ en posant

$$\forall x \in \,]1\,;2], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Cette solution est bien continue en 1 car

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1)$$

De même, on prolonge la solution sur $[0\,;4]$, $[0\,;8]$, etc.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Pour $x>0$, $u_n(x) = \mathrm{O}(1/n^2)$. La série $\sum u_n(x)$ converge absolument.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

Soit $[a\,;b]\subset\mathbb{R}_+^*$. Par monotonie, pour tout $x\in[a\,;b]$

$$\left|u_n'(x)\right| \le |u_n'(a)| + |u_n'(b)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Il y a donc convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. La fonction somme de $\sum u_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction f l'est aussi par opérations.

(b) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Il est immédiat que $f(1)$ est nul et, pour tout $x>0$, on a après télescopage

$$f'(x+1) - f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{x}$$

et

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) = f(2) &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\bigl(2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)\bigr) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on peut affirmer $f(x+1) - f(x) = \ln x$. Enfin, f est convexe en tant que somme de fonctions qui le sont.
Inversement, soit g une autre fonction vérifiant les conditions proposées.
Étudions la fonction $h = f - g$.
La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$, 1-périodique et prend la valeur 0 en 1. Nous allons montrer qu'elle est constante en observant que sa dérivée est nulle.
Pour $x>0$, on a par croissance des dérivées de f et de g

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \le f'\bigl(\lfloor x\rfloor + 1\bigr) - g'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr) = \frac{1}{\lfloor x\rfloor} + h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)$$

et parallèlement

$$h'(x) \ge h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr) - \frac{1}{\lfloor x\rfloor}$$

La fonction h' est 1-périodique, les valeurs $h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)$ sont donc constantes égales à C.
En passant à la limite quand $x\to+\infty$ l'encadrement

$$C - \frac{1}{\lfloor x\rfloor} \le h'(x) \le C + \frac{1}{\lfloor x\rfloor}$$

on obtient que la fonction h' présente une limite en $+\infty$. Puisque h' est périodique cette fonction est constante et, puisque la fonction h est périodique, la fonction h' est constante égale à 0.

(c) On reconnaît en premier membre la fonction Γ « connue » indéfiniment dérivable avec

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On sait aussi $\Gamma>0$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Considérons alors $f(x) = \ln\bigl(\Gamma(x)\bigr)$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(x+1) - f(x) = \ln x$, $f(1) = 0$ et f convexe car l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\bigl(\Gamma'(x)\bigr)^2 \le \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

ce qui conduit à $f''\ge 0$.
On peut donc affirmer

$$\Gamma(x) = \mathrm{e}^{f(x)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!(n+1)^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

et on peut conclure sachant $n+1$ équivalent à n.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) *Unicité:* Si deux polynômes sont solutions, leur différence s'annule sur $[-1\,;1]$ et correspond donc au polynôme nul.
Existence: On peut raisonner par récurrence double en introduisant

$$T_0 = 1, T_1 = X \quad \text{et} \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

ou employer la formule de Moivre pour écrire :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n)\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}\theta(1-\cos^2\theta)^p\end{aligned}$$

(b) On vérifie $\|T_n\| = 1$ et on observe

$$T_n(\cos x_k) = (-1)^k \quad \text{avec} \quad x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } x_0 > x_1 > \cdots > x_n$$

Aussi, le polynôme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
Par l'absurde, supposons $\|P\| < 1/2^{n-1}$ et considérons

$$Q = P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n$$

Le polynôme Q est de degré strictement inférieur à n et prend exactement le signe de $(-1)^k$ en les x_k. Par l'application du théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme Q s'annule sur $]x_n\,;x_{n-1}[,\dots,]x_1\,;x_0[$: c'est le polynôme nul ce qui est absurde.

(c) L'implication indirecte est entendue. Supposons, $\|P\| = 1/2^{n-1}$. Considérons de nouveau le polynôme Q. Au sens large, il prend le signe de $(-1)^k$ en les x_k et on peut assurer l'existence d'au moins une racine dans chaque intervalle $[x_n\,;x_{n-1}],\dots,[x_1\,;x_0]$. Lorsque cela est possible, on choisit cette racine dans l'intervalle ouvert et on note $\alpha_n \le \ldots \le \alpha_1$ les n racines ainsi obtenues.
Si celles-ci sont distinctes, le polynôme Q est nul et on conclut.
Sinon, lorsqu'il y en a deux qui ne sont pas distinctes, elles correspondent à un même x_k avec $k \in [\![1\,;n-1]\!]$ pour lequel Q est de signe strict[1] sur $]x_{k+1}\,;x_k[$ et $]x_k\,;x_{k-1}[$. Ces signes sont nécessairement identiques et Q présente un extremum en x_k qui est donc racine double de Q. Le polynôme Q admet alors au moins n racines comptées avec multiplicité et on conclut.

1. Car on a choisi les α_k dans l'intervalle ouvert lorsque cela est possible.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) L'application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et on vérifie aisément $N(\lambda f) = |\lambda|\,N(f)$ et $N(f+g) \le N(f) + N(g)$.
Supposons maintenant $N(f) = 0$, la fonction f est alors solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ ce qui entraîne $f = 0$.
Finalement N est une norme sur E.

(b) On a évidemment $N \le \nu$.
Inversement, soit $f \in E$ et $g = f + f''$. La fonction f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = g$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Après résolution via la méthode de variation des constantes, on obtient

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit $|f(x)| \le x\,\|g\|_\infty \le \pi\,\|g\|_\infty$ et donc $\|f\|_\infty \le \pi N(f)$.
De plus $\|f''\|_\infty \le \|f+f''\|_\infty + \|f\|_\infty$ donc $\nu(f) \le (\pi+1)N(f)$.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Posons $\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. φ est une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(f,f) \ge 0$ et si $\varphi(f,f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0\,;1]$, $f'(t) = 0$ donc $f = 0$. φ est donc un produit scalaire et N apparaît comme étant la norme associée.

(b) Pour tout $x \in [0\,;1]$, $|f(x)| \le |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sqrt{2}N(f)$, donc $\|f\|_\infty \le \sqrt{2}N(f)$.Pour $f(x) = \sin(nx\pi)$, $\|f\|_\infty = 1$ et $N(f) = n\pi/\sqrt{2} \to +\infty$.
Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) $N_a(1,1)$ et $N_a(1,-1)$ doivent exister et être strictement positifs. Cela fournit les conditions nécessaires $2a+2 > 0$ et $2-2a > 0$ d'où $a \in\,]-1\,;1[$. Montrons que cette condition est suffisante.
Supposons $a \in\,]-1\,;1[$ et considérons $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi\left((x,y),(x',y')\right) = xx' + yy' + axy' + ayx'$.
L'application φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \ne (0,0)$, $\varphi\left((x,y),(x,y)\right) \ge (1-|a|)\left(x^2+y^2\right) > 0$ en vertu de $|2axy| \le |a|\left(x^2+y^2\right)$. Ainsi φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et N_a est la norme euclidienne associée.

(b) Le cas $a = b$ est immédiat. Quitte à échanger, on peut désormais supposer $a < b$.
Par homogénéité, on peut limiter l'étude de $\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$ au couple $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in]-\pi/2\,;\pi/2]$.
Posons
$$f(t) = \left(\frac{N_a(\cos t, \sin t)}{N_b(\cos t, \sin t)}\right)^2 = \frac{1 + a\sin 2t}{1 + b\sin 2t}$$
On a
$$f'(t) = 2\frac{(a - b)\cos(2t)}{(1 + b\sin 2t)^2}$$
Les variations de f sont faciles et les extremums de $f(t)$ sont en $t = -\pi/4$ et $t = \pi/4$. Ils valent $\frac{1-a}{1-b}$ et $\frac{1+a}{1+b}$.
On en déduit
$$\inf_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} = \sqrt{\frac{1 + a}{1 + b}}$$
et
$$\sup_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} = \sqrt{\frac{1 - a}{1 - b}}$$
(dans le cas $a < b$).

Exercice 27 : [énoncé]
Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors $\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$.
Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors
$$\|f(y) - f(x)\| = \left\|\frac{y}{\|y\|} - x\right\| = \left\|\frac{y}{\|y\|} - y + y - x\right\| \leq \|y\| - 1 + \|y - x\| \leq 2\|y - x\|$$
Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors
$$\|f(y) - f(x)\| = \left\|\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\frac{y - x}{\|y\|} + x\left(\frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|x\|}\right)\right\| \leq \frac{\|y - x\|}{\|y\|} + \frac{|\|x\| - \|y\||}{\|y\|} \leq 2\|y - x\|$$
Au final f est 2-lipschitzienne.
Supposons maintenant que la norme $\|.\|$ soit hilbertienne.
Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors
$$\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$$
Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors
$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 1 - \|y\|^2 - 2\frac{\|y\| - 1}{\|y\|}(x\,|\,y)$$
Or $|(x\,|\,y)| \leq \|x\|\,\|y\| \leq \|y\|$ donc
$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 \leq 1 - \|y\|^2 + 2(\|y\| - 1) = -(1 - \|y\|)^2 \leq 0$$
Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors
$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\frac{\|x\|\,\|y\| - 1}{\|x\|\,\|y\|}(x\,|\,y)$$
Or $|(x\,|\,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$ donc
$$\|f(y) - f(x)\|^2 - \|y - x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2(\|x\|\,\|y\| - 1) = -(\|x\| - \|y\|)^2 \leq 0$$
Au final f est 1-lipschitzienne.

Exercice 28 : [énoncé]
(a) On sait
$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det A.I_n$$
Si A est inversible alors
$$\det\tilde{A}.\det A = (\det A)^n$$
donne
$$\det\tilde{A} = (\det A)^{n-1}$$
L'application $A \mapsto \det\tilde{A}$ étant continue et coïncidant avec l'application elle aussi continue $A \mapsto (\det A)^{n-1}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut assurer que $\det\tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Si A est inversible alors $\tilde{A}$ aussi donc
$$\mathrm{rg}(A) = n \implies \mathrm{rg}(\tilde{A}) = n$$
Si $\mathrm{rg}(A) \leq n - 2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait non nul d'ordre $n - 1$ et donc $\tilde{A} = 0$. Ainsi
$$\mathrm{rg}(A) \leq n - 2 \implies \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 0$$
Si $\mathrm{rg}(A) = n - 1$ alors $\dim\ker A = 1$ or $A\tilde{A} = \det A.I_n = 0$ donne $\mathrm{Im}\,\tilde{A} \subset \ker A$ et donc $\mathrm{rg}(\tilde{A}) \leq 1$. Or puisque $\mathrm{rg}(A) = n - 1$, A possède un déterminant extrait d'ordre $n - 1$ non nul et donc $\tilde{A} \neq O$. Ainsi
$$\mathrm{rg}(A) = n - 1 \implies \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 1$$

(c) Soit P une matrice inversible. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$(P^{-1}\tilde{A}P)(P^{-1}AP) = \det A.I_n$$

et $P^{-1}AP$ inversible donc

$$P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP}$$

Ainsi

$$\tilde{A} = P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$$

Les applications $A \mapsto \tilde{A}$ et $A \mapsto P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$ sont continues et coïncident sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables alors il existe P inversible vérifiant $P^{-1}AP = B$ et par la relation ci-dessus $P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP} = \tilde{B}$ donc $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont semblables.

(d) Si A est inversible alors $\tilde{A} = \det(A)A^{-1}$ et

$$\tilde{\tilde{A}} = \det(\tilde{A})\tilde{A}^{-1} = \det(A)^{n-2}A$$

Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\tilde{\tilde{A}} = \det(A)^{n-2}A$$

Exercice 29 : [énoncé]
A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \le u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \le u_{n+1}$ et donc $u \in A$.
B est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \le \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \underset{n\to\infty}{\to} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \ge N, |u_n^p| \le \varepsilon/2$$

et donc

$$|u_n| \le |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \le \varepsilon$$

Ainsi $u \to 0$ et donc $u \in B$.
C est fermé. En effet si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p, la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \le \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p$. $v^p \in B$ et $v^p \to u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.
D est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|.\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \le \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe une infinité de n tels que $|u_n^p| \le \varepsilon/2$ et donc tels que

$$|u_n| \le |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \le \varepsilon$$

Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.
E n'est pas fermé. Notons δ^p, la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore.
Posons alors

$$u^p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}\delta^k$$

qui est élément de E. La suite u^p converge car

$$\left\|u^{p+q} - u^p\right\|_\infty \le \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \le \frac{1}{2^p} \to 0$$

et la limite u de cette suite n'est pas périodique car

$$u_0 = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} = 1$$

et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) Par télescopage

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right) \circ (u - \mathrm{Id}) = u^{n+1} - \mathrm{Id}$$

donc

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id}) = \frac{1}{(n+1)}\left(u^{n+1} - \mathrm{Id}\right)$$

(b) Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \ker(u - \mathrm{Id})$. On peut écrire $x = u(a) - a$ et on a $u(x) = x$.
On en déduit

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = x$$

Or

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(a) - a\right) \to 0$$

car

$$\left\|u^{n+1}(a)-a\right\| \leq \left\|u^{n+1}(a)\right\| + \|a\| \leq 2\|a\|$$

On en déduit $x=0$.

(c) Par la formule du rang

$$\dim \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}) + \dim \ker(u-\operatorname{Id}) = \dim E$$

et puisque les deux espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires.

(d) Soit $z\in E$. On peut écrire $z=x+y$ avec $x\in\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$ et $y\in\ker(u-\operatorname{Id})$.
On a alors $v_n(z)=v_n(x)+y$ avec, comme dans l'étude du b), $v_n(x)\to 0$. On en déduit $v_n(z)\to y$.
Ainsi la suite de fonctions (v_n) converge simplement vers la projection p sur $\ker(u-\operatorname{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$.
Puisque pour tout $x\in E$, on a

$$\|v_n(x)\| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\|u^k(x)\right\| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|x\| = \|x\|$$

on obtient à la limite $\|p(x)\|\leq\|x\|$. On en déduit que la projection p est continue puis que $\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})=\ker p$ est une partie fermée.

(e) Supposons la convergence simple de la suite de fonctions (v_n) et la fermeture de $\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$.
Soit $z\in E$. Posons $y=\lim_{n\to+\infty} v_n(z)$ et $x=z-y$.
D'une part, puisque

$$u(v_n(z)) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^{k+1}(z) = v_n(z) + \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}(z)-z\right)$$

on obtient à la limite

$$u(y)=y$$

car l'application linéaire u est continue et $\left\|u^{n+1}(z)\right\|\leq\|z\|$. On en déduit $y\in\ker(u-\operatorname{Id})$.
D'autre part

$$z-v_n(z) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}(\operatorname{Id}-u^k)(z)\right)$$

et

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Id}-u^k) = \operatorname{Im}\left((\operatorname{Id}-u)\circ\sum_{\ell=0}^{k-1}u^{\ell-1}\right) \subset \operatorname{Im}(\operatorname{Id}-u) = \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$$

donc $z-v_n(z)\in\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$. On en déduit $x=\lim(z-v_n(z))\in\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$ car $\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$ est fermé.
Finalement, on a écrit $z=x+y$ avec

$$x\in\operatorname{Im}(u-\operatorname{Id}) \text{ et } y\in\ker(u-\operatorname{Id})$$

Exercice 31 : [énoncé]
Soit $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x\in\mathbb{R}$. Il existe un unique $y\in A$ tel que $|x-y|=d(x,A)$. Or $d(x,A)=0$ donc $x=y\in A$. Ainsi A est fermé.
Par l'absurde supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existe $a<c<b$ tel que $a,b\in A$ et $c\notin A$.
Posons $\alpha=\sup\{x\in A \mid x\leq c\}$ et $\beta=\inf\{x\in A\mid x\geq c\}$. On a $\alpha,\beta\in A$, $\alpha<c<\beta$ et $]\alpha\,;\beta[\subset C_{\mathbb{R}}A$.
Posons alors $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$. On a $d(\gamma,A)=\frac{\beta-\alpha}{2}=|\gamma-\alpha|=|\gamma-\beta|$ ce qui contredit l'hypothèse d'unicité. Absurde.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) $B_f(x,r)$ est une partie fermée et bornée en dimension finie donc compacte.
L'application linéaire f étant continue (car au départ d'un espace de dimension finie), l'image $f(B_f(x,r))$ est aussi compacte.

(b) La partie K est convexe et donc $f(K)$ aussi car f est linéaire. Les vecteurs $f^k(a)$ étant tous éléments de K, la combinaison convexe définissant y_n détermine un élément de K.
Après simplification

$$f(y_n)-y_n = \frac{1}{n}\left(f^n(a)-a\right)$$

La partie K étant bornée, la suite $(f^n(a)-a)_{n\geq 1}$ l'est aussi et donc $f(y_n)-y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$.
Enfin, la suite $(y_n)_{n\geq1}$ évolue dans le compact K, elle admet donc une valeur d'adhérence $w\in K$:

$$y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} w$$

et la propriété

$$f(y_{\varphi(k)})-y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_E$$

donne à la limite $f(w)=w$.

(c) $0_E \notin K$ et donc $w \neq 0_E$. L'égalité $f(w) = w$ assure que 1 est valeur propre de f.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé avec $\|v\| < r$.
Le vecteur $x + v$ est élément de K et donc ses itérés $f^n(x+v) = f^n(x) + \lambda^n v$ le sont encore. Puisque le compact K est borné, les suites $(f^n(x+v))$ et $(f^n(x))$ le sont aussi et donc $(\lambda^n v)$ l'est encore. On en déduit $|\lambda| \leq 1$.

(d) Choisissons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable et cependant, en choisissant $x = (1,0,0)$ et $r = 1/2$, la condition $f(K) \subset K$ est remplie.

(e) Puisque $f(K) = K$, les vecteurs e_1/a, e_2/b et e_3/c sont des valeurs prises par f. On en déduit que l'endomorphisme f est nécessairement bijectif.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé. Quitte à réduire la norme de v, on peut supposer $v \in K$. On a alors $f^n(v) = \lambda^n.v \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui oblige $|\lambda| \leq 1$.
Sachant $f^{-1}(K) = K$, un raisonnement symétrique donne $|\lambda| \geq 1$ et donc $|\lambda| = 1$.
Enfin, en dimension impaire, un endomorphisme réel admet nécessairement une valeur propre !

Exercice 33 : [énoncé]

(a) R est la borne supérieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble

$$\left\{r \in [0\,;+\infty[\mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

Soit $0 < r < R$. On peut introduire ρ tel que $r < \rho$ et $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite bornée. Pour tout $z \in D(0,r)$, on a

$$|a_n z^n| \leq |a_n r^n| = |a_n|\,\rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = \mathrm{O}\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right)$$

Ce majorant uniforme étant sommable (car $|r/\rho| < 1$), on obtient la convergence normale voulue.

(b) Pour $|z| < r$, on peut décomposer en série géométrique

$$\frac{1}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{r^{n+1}} z^n$$

Sachant la fonction f bornée sur le compact $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, il y a convergence de la série

$$\sum \int_0^{2\pi} \left|\frac{\mathrm{Im}(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{r^{n+1}} z^n\right| \mathrm{d}\theta$$

ce qui permet une intégration terme à terme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Im}\left(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\big(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta\right) \frac{z^n}{r^{n+1}}$$

On obtient ainsi un développement en série entière sur $D(0,r)$.
Pour l'expliciter, on calcule le terme intégral en procédant à une intégration terme à terme justifiée par l'absolue convergence de $\sum a_n r^n$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\big(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k r^k$$

avec

$$I_k = \mathrm{Re}(a_k)\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{Im}(a_k)\int_0^{2\pi}\cos(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Pour $n \neq k$, les deux intégrales sonts nulles.
Pour $n = k = 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{d}\theta = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

Pour $n = k \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \sin^2(k\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\pi \text{ et}$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

On peut alors conclure

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Im}\left(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi\,\mathrm{Im}(a_0)}{r} + \pi\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\mathrm{Im}(a_n) - \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(a_n)\big)z^n}{r}$$
$$= \frac{\mathrm{i}\pi}{r}\left(\overline{f(0)} - f(z)\right)$$

(c) Si f est une telle fonction, l'intégrale au-dessus est nulle et donc

$$f(z) = \overline{f(0)} \text{ pour tout } |z| < r$$

On en déduit $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 1$. La fonction f est alors constante réelle.

Exercice 34 : [énoncé]

Pour $x \in [0\,;R[$, la série $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ est une série à termes positifs. Par la formule de Taylor reste intégrale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et puisque le reste intégrale est positif, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x)$$

Puisque ses sommes partielles sont majorées, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ est convergente.

Pour $x \in\,]-R\,;0]$, on a

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} |x|^n$$

et la série $\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 35 : [énoncé]

(a)

$$N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p)$$

(b) $D(n) \leq n!$ donc $\left|\frac{D(n)}{n!}\right| \leq 1$ qui implique $R \geq 1$.

On a $\sum_{p=0}^{n} N(n,p) = n!$ donc $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!} D(n-p) = 1$ d'où par produit de Cauchy $\mathrm{e}^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ puis

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$$

(c)

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^n$$

donc

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

puis

$$N(n,p) = \frac{n!}{p!} \sum_{k=0}^{n-p} \frac{(-1)^k}{k!}$$

(d) Finalement

$$\frac{1}{n!} N(n,p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{p!\mathrm{e}}$$

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Pour $a_n = (-1)^n$, on a $f(x) = 1/(1+x)$, $\ell = 1/2$ et la série $\sum a_n$ diverge.

(b) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0\,;1[$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A_N + B_N - C_N$$

avec

$$A_N = f(x) - \ell,\, B_N = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \text{ et } C_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 au-delà duquel

$$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

et alors pour tout $N \geq n_0$

$$|C_N| \leq \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}$$

Posons alors

$$x = 1 - \frac{1}{N}$$

et on a

$$|C_N| \leq \varepsilon$$

D'autre part

$$|B_N| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n(1-x^n)\right| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} na_n = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} na_n$$

En vertu du théorème de Cesaro

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} na_n \to 0$$

et donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq n_1$

$$|B_N| \leq \varepsilon$$

Enfin, puis f tend vers ℓ en 1^-, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq n_2$

$$A_N = |f(1-1/N) - \ell| \leq \varepsilon$$

Finalement, pour $N \geq \max(n_0, n_1, n_2)$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell\right| \leq 3\varepsilon$$

On peut donc affirmer que la série $\sum a_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$$

Exercice 37 : [énoncé]

(a) Notons a_n le coefficient générale de la série entière étudiée $a_m = 1$ s'il existe n tel que $m = p_n$ et $a_m = 0$ sinon. On observe$a_n = O(1)$ donc $R \geq 1$ et $a_n \not\to 0$ donc $R \leq 1$ puis $R = 1$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $n \leq \varepsilon p_n$. On a alors :

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} + (1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon}$$

Quand $x \to 1^-$,

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} \to 0$$

et

$$(1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon} \leq \frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}} \to \varepsilon$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq 2\varepsilon$$

Cela permet d'affirmer $(1-x)f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$.

(b) Ici, il faut penser à une comparaison série-intégrale...
Pour $x \in \left]0\,;1\right[$, la fonction $t \mapsto x^{t^q}$ est décroissante. Par la démarche classique, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^q \ln x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^q t^q}\,\mathrm{d}t$$

avec $a = \sqrt[q]{-\ln x}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

et on ne calculera pas cette dernière intégrale.
Par l'encadrement qui précède, on peut affirmer

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[q]{1-x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

sachant $\ln x \sim x - 1$

Exercice 38 : [énoncé]

(a) $R = 1$.

(b) $f_0(x) = \frac{x}{1-x}$, $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
On obtient les expressions de $f_2, \dots, f_5$ par

```
seq(normal(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)), k=2..5);
```

On peut présumer un équivalent de la forme $\frac{C_\alpha}{(1-x)^{1+\alpha}}$.
On peut obtenir les premières valeurs de C_α par

```
seq(eval(simplify(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)*(1-x)^(k+1)),
x=1), k=0..5);
```

Cela laisse présumer $C_\alpha = (-1)^{\alpha+1}\alpha!$.
Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$, $f_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1}x^{n-1}$ donc $xf_p'(x) = f_{p+1}(x)$.
En raisonnant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite (Q_p) de polynômes de sorte que
$Q_0 = X$ et $Q_{p+1}(X) = X(1-X)Q_p'(X) + (p+1)XQ_p(X)$.
On observe $Q_{p+1}(1) = (p+1)Q_p(1)$ de sorte que $Q_p(1) = p!$.
On peut alors affirmer $f_p(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{1+p}}$.

(c) À partir du développement connu de$(1+u)^\alpha$, on obtient
$b_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}$.
$\ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln\frac{n^\alpha}{b_n} = \alpha\ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{b_{n+1}}{b_n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série
$\sum \ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ est absolument convergente.
On en déduit que la suite de terme général $\ln\frac{n^\alpha}{b_n}$ converge puis que $\frac{n^\alpha}{b_n}$ tend vers une constante $A(\alpha) > 0$.
On peut alors conclure en exploitant le résultat suivant :
$a_n \sim b_n$ avec $a_n > 0$, $R = 1$ et $\sum a_n$ diverge entraine
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$.
Pour établir ce résultat :
- d'une part, on montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$,
- d'autre part, on écrit
$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n\right| \le \sum_{n=0}^{N} |a_n - b_n| + \varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$ en choisissant N de sorte que $|a_n - b_n| \le \varepsilon a_n$ pour $n \ge N$.
On peut alors conclure que $f_\alpha(x) \sim \frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$.

Exercice 39 : [énoncé]
Posons

$$f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sh} x}$$

La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\infty\,;R\right[$ avec $R = \operatorname{argsh} 1$.

Soit $x \in \left]-R\,;R\right[$. Puisque $|\operatorname{sh} x| < 1$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sh} x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}^n x$$

Chacune des fonctions $x \mapsto \operatorname{sh}^n x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{sh}^n x = \sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k}x^k$$

Puisque les coefficients du développement en série entière de la fonction sh sont tous positifs, on a aussi $a_{n,k} \ge 0$ pour tout n, k. Pour $x \in \left]-R\,;R\right[$, on peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k}x^k\right)$$

Puisque la série $\sum_{k\ge n}\left|a_{n,k}x^k\right| = \sum_{k\ge n} a_{n,k}|x|^k$ converge et puisque la série $\sum_{n\ge 0}\sum_{k=n}^{+\infty}\left|a_{n,k}x^k\right| = \sum_{n\ge 0}(\operatorname{sh}|x|)^n$ converge aussi, on peut par le théorème de Fubini échanger les deux sommes ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_{n,k}\right)x^k$$

Ainsi la fonction f est développable en série entière sur $\left]-R\,;R\right[$. Le rayon de convergence de la série entière ainsi introduite est alors au moins égale à R et en fait exactement égal à R car f diverge vers $+\infty$ en R^- et ne peut donc être prolongée par continuité en R.

Exercice 40 : [énoncé]
On a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \underset{u=1/t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+(ux)^2} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n}x^{2n}\,\mathrm{d}u$$

Pour $|x| < 1$, il y a convergence normale sur $[0\,;1]$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} = \frac{\arctan x}{x}$$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi\colon t\mapsto 1$, on obtient $a_n\to 0$.

(b) On a

$$a_n+a_{n+2}=\int_0^{\pi/4}(\tan t)'(\tan t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}$$

(c) Par monotonie $a_n+a_{n+2}\le 2a_n\le a_n+a_{n-2}$. On en déduit $a_n\sim\frac{1}{2n}$ puis $u_n(x)\sim\frac{x^n}{2n^{\alpha+1}}$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$ est donc égale à 1.
Pour $x=1$, $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si,$\alpha>0$.
Pour $x=-1$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement si $\alpha\le -1$.
Pour $\alpha>-1$, $2\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k^\alpha}a_k=\alpha+\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k^\alpha}(a_k+a_{k+2})+\mathrm{o}(1)$
Or $\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha(n+1)}$ converge par application de critère spécial des séries alternées (car $n\mapsto\frac{1}{n^\alpha(n+1)}$ décroît vers 0 pour n assez grand) donc $\sum u_n(x)$ converge.

(d) Puisque $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+2}x^n+a_nx^n=-\frac{\ln(1-x)}{x}$$

On en déduit

$$f(x)+\frac{f(x)-\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}x}{x^2}=-\frac{\ln(1-x)}{x}$$

puis

$$f(x)=\frac{-x\ln(1-x)+\frac{\pi}{4}+x\frac{\ln 2}{2}}{x^2+1}$$

Exercice 42 : [énoncé]

(a) On a

$$|a_n|=\frac{1}{n!}\int_0^1 t\prod_{k=1}^{n-1}(k-t)\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{n!}\int_0^1\prod_{k=1}^{n-1}k\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{n}$$

donc $R\ge 1$.

$$|a_n|\ge\frac{1}{n!}\int_0^1 t(1-t)\times\prod_{k=2}^{n-1}(k-1)\,\mathrm{d}t\ge\frac{1}{4n(n-1)}$$

donc $R\le 1$. Finalement $R=1$.

(b) Soit $x\in\left]-1\,;1\right[$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\,\mathrm{d}t$$

or par convergence uniforme de la suite de fonctions de la variable t sur $[0\,;1]$ (convergence uniforme obtenue par convergence normale grâce à $|x|<1$) on peut permuter somme et intégrale.

$$S(x)=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\,\mathrm{d}t=\int_0^1(1+x)^t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)}\right]_{t=0}^{t=1}=\frac{x}{\ln(1+x)}$$

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Par application de la règles de d'Alembert, les rayons de convergence de séries entières définissant f et g sont égaux à 1.

(b) g est assurément définie et continue sur $\left]-1\,;1\right[$ en tant que somme de série entière.
La série entière définissant g converge aussi sur $[-1\,;0]$ par application du critère spécial et

$$\forall x\in[-1\,;0]\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)x^k\right|\le-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

Il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions continues définissant g sur $[-1\,;0]$.
Ainsi g est définie et continue sur $\left[-1\,;1\right[$.
On peut aussi souligner que g n'est pas définie en 1 car

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)1^n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{n}$$

(c) Pour $x\in\left]-1\,;1\right[$,

$$(1-x)f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n-\ln(n-1))\,x^n=-g(x)$$

(d) La fonction f est continue sur $\left]-1\,;1\right[$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence 1. On peut prolonger f par continuité en -1 via

$$f(x)=-\frac{g(x)}{1-x}\xrightarrow[x\to-1]{}-\frac{g(-1)}{2}$$

(e) On a

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc pour $x\in\,]-1\,;1[$

$$g(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}-\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x^n$$

et donc

$$g(x)=\ln(1-x)+1-\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x^n$$

Le terme sommatoire définit une fonction continue sur $[-1\,;1]$ (par convergence normale) et donc

$$g(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\ln(1-x)$$

puis

$$f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Exercice 44 : [énoncé]

(a) Posons

$$a_n=\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Puisque $a_{n+1}/a_n\to1$, on peut affirmer $R=1$.

(b) La suite (a_n) décroît vers 0 donc par le critère spécial des séries alternée, la série entière converge en $x=-1$.
Puisque $a_n\sim1/\sqrt{n}$, par équivalence de séries à termes positifs, la série entière diverge en $x=1$.

(c) Par positivité des termes sommés, on a pour $x\in[0\,;1]$,

$$f(x)\geq\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\xrightarrow[x\to1^-]{}\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Puisque

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$$

Pour tout $M\in\mathbb{R}$, il existe un rang N tel que

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq M+1$$

et pour x au voisinage de 1^-

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\geq M$$

puis

$$f(x)\geq M$$

On peut donc affirmer que

$$f(x)\xrightarrow[x\to1^-]{}+\infty$$

(d) On a

$$(1-x)f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^{n+1}$$

et par décalage d'indice

$$(1-x)f(x)=\sin(1)x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]x^n$$

Puisque

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

la série entière en second membre est définie et continue en 1 par convergence normale de la série de fonctions associée. On en déduit

$$(1-x)f(x)\xrightarrow[x\to1]{}\sin(1)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right]=0$$

Il est aussi possible de procéder par les en ε exploitant

$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right|\leq\varepsilon\text{ pour }n\text{ assez grand}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Exercice 45 : [énoncé]

(a) Soit $r \in \left]0\,;R\right[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n = \mathrm{o}\left(a_n r^n\right)$$

car par croissance comparée

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{z}{r}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

(b) On a

$$f(t)\mathrm{e}^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n \mathrm{e}^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \text{ avec } f_n(t) = \frac{a_n}{n!} t^n \mathrm{e}^{-xt}$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left[0\,;+\infty\right[$.
Les fonctions f_n et la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $\left[0\,;+\infty\right[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $\left[0\,;+\infty\right[$ car $t^2 f_n(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, \mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{n!} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

Par intégration par parties généralisées successives

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t = \frac{n!}{x^{n+1}}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, \mathrm{d}t = \frac{|a_n|}{x^{n+1}}$$

Si $x > 1/R$ alors la série $\sum |a_n| / x^{n+1}$ est convergente et, par le théorème de Fubini, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{x^{n+1}}$$

Exercice 46 : [énoncé]

(a) s est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
La série diverge en $x = 1$ (par série de Riemann avec $1/2 \leq 1$) et converge en $x = -1$ par application du critère spécial des séries alternées. On conclut $I = \left[-1\,;1\right[$.

(b) Puisque s est la somme d'une série entière, on peut dériver terme à terme sur $\left]-1\,;1\right[$ et

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n$$

Sur $I \cap \mathbb{R}_+$, cette somme est positive. La fonction s est donc croissante sur $\left[0\,;1\right[$.
Si celle-ci était majorée par un réel M, nous aurions pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in \left[0\,;1\right[, \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \leq M$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq M$$

Ceci est absurde car la série à termes positifs $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge et ne peut donc avoir ses sommes partielles majorées. La fonction s est donc croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$ en 1^-.

(c) Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^n$$

Pour $x \leq 0$, on peut écrire $x = -t$ avec $t \geq 0$ et alors

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n$$

avec $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 0$. On vérifie que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et donc le critère spécial s'applique à la série alternée $\sum (-1)^n a_n t^n$. Sa somme est donc du signe de son premier terme ce qui fournit $(1-x)s'(x) \geq 0$. On en déduit

$$\forall x \in \left]-1\,;0\right], s'(x) \geq 0$$

(d) Après étude (un peu lourde) du signe de $f''(x)$, on peut affirmer que f est concave et croissante.
Pour $x \in [0\,;1[$, on a clairement $s''(x) \geq 0$. Pour $x \in]-1\,;0]$, considérons

$$((1-x)s'(x))' = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)x^n$$

puis

$$(1-x)\left((1-x)s'(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(f(n+1) - f(n)\right) x^n$$

Posons $b_n = f(n+1) - f(n) \geq 0$.
On vérifie $b_n \to 0$ et $b_{n+1} \leq b_n$ car la concavité de f fournit

$$\frac{b_n + b_{n+2}}{2} \leq b_{n+1}$$

Le critère spécial de série alternée s'applique à nouveau, la somme est du signe de son premier terme et cela fournit

$$(1-x)\left((1-x)s'(x)\right)' \geq 0$$

puis $s''(x) \geq 0$ car on sait $s'(x) \geq 0$.
Finalement s est convexe.

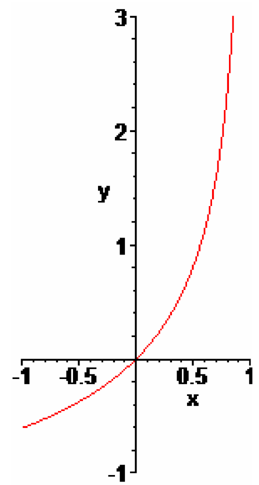

FIGURE 1 – Allure de la fonction s

Exercice 47 : [énoncé]

(a) Puisque

$$\left|1 - \frac{z}{2^k}\right| \leq 1 + \frac{|z|}{2^k}$$

l'inégalité $|P_n(z)| \leq P_n(-|z|)$ est immédiate.
Par produit à facteurs strictement positifs, on a $P_n(-|z|) > 0$ et on peut donc introduire

$$\ln P_n(-|z|) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{|z|}{2^k}\right)$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{|z|}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{2^n}$$

et ce terme est donc sommable. On peut alors écrire

$$\ln P_n(-|z|) \leq M = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{|z|}{2^n}\right)$$

puis

$$|P_n(z)| \leq \mathrm{e}^M$$

(b) On a

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq |P_n(z)| \frac{|z|}{2^{n+1}} \leq \mathrm{e}^M \frac{|z|}{2^{n+1}}$$

Le majorant est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z) - P_n(z)$ est donc convergente et la suite $(P_n(z))$ est de même nature.

(c) Pour $|z| \leq 1$, on a

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq \frac{\mathrm{e}^M}{2^{n+1}} \text{ avec } M = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

et donc

$$\sup_{|z|\leq 1} |P_{n+1}(z) - P_n(z)| \leq \frac{\mathrm{e}^M}{2^{n+1}}$$

Ce terme est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z) - P_n(z)$ converge donc normalement, et donc uniformément, sur le domaine défini par la condition $|z| \leq 1$. On en déduit que la suite de fonctions $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur ce même domaine. Or chaque fonction P_n est continue en 0 et donc sa limite simple f est continue en 0.

(d) La fonction f vérifie évidemment les conditions énoncées.
Inversement, si une fonction g vérifie les conditions proposées alors

$$g(z) = (1-z)g(z/2) = (1-z)(1-z/2)g(z/4) = \dots$$

Par récurrence

$$g(z) = P_n(z)g(z/2^{n+1})$$

Par continuité de g en 0, un passage à la limite donne $g(z) = f(z)$.

(e) Par analyse-synthèse, la recherche d'une fonction somme de série entière $\sum a_n z^n$ solution conduit à

$$a_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-2^k}$$

et un rayon de convergence infini.

Exercice 48 : [énoncé]

Soulignons que les termes sommés pour définir la série entière ont un sens car l'irrationalité de α donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n\pi\alpha) \neq 0$$

(a) Puisque

$$\frac{1}{|\sin(n\pi\alpha)|} \geq 1$$

la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge grossièrement en 1 et donc $R_\alpha \leq 1$.

(b) Par une récurrence facile, on montre $u_n \geq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^{u_n-1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}$$

(c) On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_k}$$

et puisque la suite (u_n) est croissante

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{K}{u_{n+1}}$$

avec

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}$$

On en déduit

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{K\pi u_n}{u_{n+1}} = \frac{K\pi}{u_n^{u_n-1}}$$

(d) Considérons $m = u_n \in \mathbb{N}^*$. Quand $n \to +\infty$, on a pour $x > 0$

$$\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \to -\infty$$

En effet

$$m\alpha = u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

Or

$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_n}{u_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{k+1}}{u_k} \in 1 + 2\mathbb{N}$$

et donc

$$-\sin(m\pi\alpha) = \sin\left[\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}\right]$$

d'où

$$0 \leq -\sin(m\pi\alpha) \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}$$

puis

$$-\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \geq C\frac{(xu_n)^{u_n}}{u_n} \to +\infty$$

On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge pour tout $x > 0$ et donc $R_\alpha = 0$.

(e) Par l'absurde, supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe alors un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $qu_n\alpha \in \mathbb{N}$ or

$$qu_n\alpha = qu_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

avec comme vu ci-dessus

$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$

On en déduit

$$qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}$$

Or

$$0 < qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} < \frac{qKu_n}{u_{n+1}} \to 0$$

C'est absurde.

Exercice 49 : [énoncé]

(a) Une fonction dérivable sur un intervalle y est strictement croissante si, et seulement si, sa dérivée est positive et n'est nulle sur aucun sous-intervalle non réduit à un point (l'ensemble des zéros est d'intérieur vide).

(b) L'application $F\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une bijection continue strictement croissante de $[a\,;b]$ vers $[0\,;L]$ avec L l'intégrale de f sur $[a\,;b]$. Les x_i sont alors déterminés par

$$x_i = F^{-1}\left(\frac{iL}{n}\right)$$

(c) On peut écrire

$$\frac{L}{n}\sum_{i=1}^n g(x_i) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_i)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Montrons par application du théorème de convergence dominée

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

On écrit

$$\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x$$

avec

$$h_n(x) = g(x_i)f(x) \text{ pour } x \in [x_{i-1}\,;x_i[\ (x_i \text{ est fonction de } n)$$

Les fonctions g et h étant continues sur un segment, on peut les borner et il est facile d'acquérir l'hypothèse de domination. Le plus difficile est d'obtenir la convergence simple...

Soit $x \in [a\,;b]$.

Si $f(x) = 0$ alors $h_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x)$.

Si $f(x) \neq 0$ alors, il existe $m > 0$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\forall y \in [a\,;b],\ |y - x| \leq \alpha \implies f(y) \geq m$$

Pour l'indice i tel que $x \in [x_{i-1}\,;x_i[$, on a (selon que l'intervalle $[x_{i-1}\,;x_i]$ est de longueur supérieure ou inférieure à α)

$$\frac{1}{n}L = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t \geq m\min(x_i - x_{i-1}, \alpha)$$

On en déduit $x_i - x_{i-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis $x_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, et, par continuité de g, $h_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x)$.

Par application du théorème de convergence dominée, on peut conclure

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(x_i) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Exercice 50 : [énoncé]

Sans perte de généralités, on suppose $a \leq b$.

(a) Les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et à termes positifs. Par l'inégalité $2xy \leq x^2 + y^2$, on obtient $a_{n+1} \leq b_{n+1}$. On en déduit la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n). Ces suites sont monotones et bornées donc convergentes. Notons ℓ et ℓ' leurs limites. Par passage à la limite de la relation définissant a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, on obtient

$$\ell = \frac{\ell + \ell'}{2}$$

On en déduit $\ell = \ell'$.

(b) L'intégrale définissant $T(a,b)$ est convergente car

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}} \underset{u\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$$

La fonction de changement de variable $t \mapsto \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ croissante de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Après calculs

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

Par parité de la fonction intégrée

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a,b)$$

(c) On a

$$T(a_{n+1}, b_{n+1}) = T(a_n, b_n)$$

et donc

$$T(a_n, b_n) = T(a,b)$$

Par convergence dominée avec la fonction de domination

$$\varphi(u) = \frac{1}{a^2+u^2}$$

on obtient

$$T(a_n, b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{M(a,b)^2+u^2} = \frac{1}{M(a,b)}\left[\arctan\frac{u}{M(a,b)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{M(a,b)}$$

Exercice 51 : [énoncé]
La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t = \pi/2 + \pi \mod 2\pi$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$$\left|\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left|\sin^n t\right|\mathrm{d}t$$

On a

$$f_n(t) = \left|\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\right| \xrightarrow{CS} f(t)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \ne \pi/2 \mod \pi \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{sinon}\end{cases}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$|f_n(t)| \le \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 52 : [énoncé]

(a) On a

$$u_n(1) = \int_0^{\pi/2}\sin t(\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}$$

La série de terme général $u_n(1)$ est divergente.

(b) Pour $\alpha \le 1$,

$$\forall t \in\,]0\,;\pi/2], (\sin t)^\alpha \ge \sin t$$

et donc $u_n(\alpha) \ge u_n(1)$.
On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est alors divergente.

Pour $\alpha > 1$. La série des $u_n(\alpha)$ est une série à termes positifs et

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) = \int_0^{\pi/2}(\sin t)^\alpha\frac{1-(\cos t)^{n+1}}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) \le \int_0^{\pi/2}\frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

avec l'intégrale majorante qui est convergente puisque

$$\frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t} \sim 2\frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{2}{t^{2-\alpha}} \text{ quand } t\to 0^+$$

Puisque la série à termes positifs $\sum u_n(\alpha)$ a ses sommes partielles majorées, elle est convergente.

(c) Par ce qui précède, on peut intégrer terme à terme car il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues des fonctions. On peut alors écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha t\cos^n t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^\alpha t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Pour $\alpha = 2$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1+\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}+1$$

Pour $\alpha = 3$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 t}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sin t(1+\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}$$

Exercice 53 : [énoncé]
Posons $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.
La fonction u est définie sur $\mathbb{R}\times[0\,;+\infty[$ et admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.
$\forall x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
$\forall t\in[0\,;+\infty[$, $x\mapsto\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Enfin
$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0\,;+\infty[,\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leq t\mathrm{e}^{-t^2}=\varphi(t)$$
avec $\varphi\colon[0\,;+\infty[\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Par domination, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$g'(x)=\int_0^{+\infty}-t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$
Procédons à une intégration par parties avec les fonctions $\mathcal{C}^1$
$$u(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\text{ et }v(t)=\sin(xt)$$
Puisque le produit uv converge en 0 et $+\infty$, l'intégration par parties impropre est possible et
$$g'(x)=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$
Ainsi on obtient
$$g'(x)=-\frac{1}{2}xg(x)$$
g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $g(0)=\sqrt{\pi}/2$ on conclut
$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

Exercice 54 : [énoncé]
Si $|a|<1$ alors
$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)t}}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}a^k\mathrm{e}^{i(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t$$
Par convergence normale de la série
$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{+\infty}a^k\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}2\pi a^{n-1} & \text{si } n\geq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
Si $|a|>1$ alors
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-a}\,\mathrm{d}t&=-\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{int}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}/a}\,\mathrm{d}t\\&=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{a^{k+1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+k)t}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}-2\pi a^{n-1} & \text{si } n\leq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Exercice 55 : [énoncé]

(a) $a_{n+1}/a_n\to 1/\mathrm{e}<1$.

(b) Posons
$$I_n=\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$
Par intégration par parties, on obtient $I_n=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ d'où
$$a_n=n\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

(c) On a
$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}nt^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$
et la série
$$\sum\int_0^{+\infty}\left|nt^n\mathrm{e}^{-nt}\right|\mathrm{d}t=\sum a_n$$
converge donc on peut intégrer terme à terme et on obtient
$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}nt^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$
avec
$$(1-t\mathrm{e}^{-t})\sum_{n=1}^{+\infty}nt^n\mathrm{e}^{-nt}=\sum_{n=1}^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-nt}=\frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-t\mathrm{e}^{-t}}$$
d'où la conclusion.

Exercice 56 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(t)=1/(1+t^n)$ sur $]0\,;1]$.
La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction $u_\infty\colon t\mapsto 1$.
Les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont continues par morceaux.
Enfin
$$\forall t\in\,]0\,;1],|u_n(t)|\leq 1=\varphi(t)$$
avec $\varphi\colon\,]0\,;1]\to\mathbb{R}_+$ intégrable. Par convergence dominée
$$I_n=\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 u_\infty(t)\,\mathrm{d}t=1=\ell$$

(b) On a
$$\ell - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\frac{t^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$
Par intégration par parties,
$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$
Puisque
$$\left|\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$
on peut affirmer $\ell - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

(c) Pour $y \in \left]0\,;1\right[$,
$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^k}{k+1}$$
Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$
Sans peine, $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ sachant $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(d) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $y = t^n$
$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y$$
Par convergence dominée (domination par sa limite simple),
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y \to \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}$$
Ainsi,
$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
puis
$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 57 : [énoncé]

(a) Posons $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}$$
La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$|f(x,t)| \le \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$$
avec ψ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
On en déduit que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Par intégration par parties
$$\varphi(x) = -\frac{1}{\mathrm{i}x} + \frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$
La fonction
$$x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu de la domination
$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\right)\right| = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} \le \frac{2}{1+t^2}$$
On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec
$$\varphi'(x) = \frac{1}{\mathrm{i}x^2} - \frac{1}{\mathrm{i}x^2}\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$
Or par intégration par parties
$$\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2} = \left[-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + \mathrm{i}x\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$
Enfin, une dernière intégration par parties donne
$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}\left[-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right]_0^{+\infty} + \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$
et la relation voulue...

(c) Par le changement de variable $u = tx$, on obtient l'expression proposée.
On peut décomposer

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\int_0^1 \frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

D'une part, par intégration par parties

$$\int_1^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty} = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{x^2+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$$

et

$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u\right| \le \int_1^{+\infty}\frac{u^2-x^2}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2+1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

D'autre part

$$\int_0^1\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^1\frac{u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\int_0^1\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\right]_0^1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$$

et

$$\left|\int_0^1\frac{u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \le \int_0^1\frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right|}{u}\,\mathrm{d}u < +\infty$$

Au final

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\ln x + \mathrm{o}(\ln x) + \mathrm{o}(1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \mathrm{i}\ln x$$

(d) En vertu de ce qui précède

$$\mathrm{Im}(\varphi'(x)) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x \to -\infty$$

On en déduit que la fonction réelle $\mathrm{Im}\,\varphi$ n'est pas dérivable en 0, il en est *a fortiori* de même de φ.

Exercice 58 : [énoncé]

(a) La fonction $x \mapsto 1/x^\alpha(1+x)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

Cette fonction est donc intégrable si, et seulement si, $\alpha \in \,]0\,;1[$.
La fonction intégrée étant de surcroît positive, l'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha \in \,]0\,;1[$.

(b) On a

$$f(\alpha) - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}$$

Or

$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}\right| \le \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = C$$

et pour $\alpha \le 1/2$

$$\left|\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}\right| \le \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = C'$$

On a donc

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} + \mathrm{O}(1) = \frac{1}{\alpha} + \mathrm{O}(1) \sim \frac{1}{\alpha}.$$

On peut aussi obtenir cet équivalent en commençant par opérer le changement de variable $u = x^\alpha$.

(c) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $x = 1/t$, on obtient $f(\alpha) = f(1-\alpha)$ d'où la symétrie affirmée.

(d) Posons

$$u(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}$$

Pour chaque $x \in \,]0\,;+\infty[$, la fonction $\alpha \mapsto u(\alpha, x)$ est continue et pour chaque $\alpha \in \,]0\,;1[$ la fonction $x \mapsto u(\alpha, x)$ est continue par morceaux. Enfin pour $\alpha \in [a\,;b] \in \,]0\,;1[$ (avec $a > 0$), on a

$$|u(x,\alpha)| \le \frac{1}{x^a(1+x)} \text{ si } x \in [1\,;+\infty[$$

et

$$|u(x,\alpha)| \le \frac{1}{x^b(1+x)} \text{ si } x \in \,]0\,;1]$$

Ainsi
$$|u(x,\alpha)| \leq \varphi_{a,b}(x) \text{ pour } x \in]0\,;+\infty[$$
en posant $\varphi_a(x) = u(a,x) + u(b,x)$ qui est intégrable.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;1[$.

(e) Par le changement de variable $x = 1/t$, on peut écrire
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$
et alors
$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{1-\alpha}+x^\alpha}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$$
On vérifie que pour $x \geq 1$, la fonction $\alpha \mapsto x^{1-\alpha}+x^\alpha$ est décroissante sur $]0\,;1/2]$ puis croissante sur $[1/2\,;1[$. La fonction f a donc la même monotonie et son minimum est donc
$$f(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = \pi$$
via le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 59 : [énoncé]

(a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}$. Les conditions initiales proposées déterminent alors une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive au voisinage de 0 et par la satisfaction de l'équation différentielle, on peut affirmer que u'' est strictement négative au voisinage de 0. La fonction u' étant alors strictement décroissante au voisinage de 0 et vérifiant $u'(0) = 0$, les existences de α et β sont assurées.
Par l'absurde, supposons que la fonction u ne s'annule par sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction u est alors positive et u'' est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction u' étant donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a
$$\forall t \geq \beta, u'(t) \leq u'(\beta)$$
En intégrant
$$\forall x \geq \beta, u(x) - u(\beta) \leq u'(\beta)(x-\beta)$$
Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \to +\infty$.
On en déduit que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$ (et cette annulation est nécessairement sur $\mathbb{R}_+^*$)
De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_-^*$ (et on peut même montrer que la fonction u est paire...)

(c) Considérons l'ensemble
$$A = \{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$
C'est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure δ. Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que
$$t_n \to \delta$$
Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geq 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A.
De même on obtient γ.

(d) Grâce à l'équation différentielle
$$W' = u''v - uv'' = 0$$
Le wronskien W est donc constant mais peu importe... puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant.
Or
$$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta)$$
Puisque u est strictement positive sur $]\gamma\,;\delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit
$$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$
ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma\,;\delta[$.

(e) Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $[\gamma + n\pi\,;\delta + n\pi]$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.

Exercice 60 : [énoncé]

(a) Par l'absurde, supposons que f s'annule et introduisons

$$b = \inf\{t \in [a\,;+\infty[\mid f(t) = 0\}$$

Par continuité de f, on a $f(b) = 0$ et sachant $f(a) > 0$, on aussi.

$$\forall t \in [a\,;b], f(t) \geq 0$$

On en déduit $f''(t) = q(t)f(t) \geq 0$ et donc f' est croissante sur $[a\,;b]$. Sachant $f'(a) > 0$, la fonction f est croissante sur $[a\,;b]$. Ceci est incompatible avec la valeur $f(b) = 0$. C'est absurde.
On en déduit que f ne s'annule pas sur $[a\,;+\infty[$ et est donc strictement positive. Comme au dessus, on retrouve que f' est croissante et donc strictement positive. Enfin

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geq f(a) + f'(a)(x-a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

(b) $(u'v - uv')' = u''v - uv'' = 0$. La fonction $u'v - uv'$ est donc constante égale à -1 (qui est sa valeur en a).
Puisque $v(a) = 0$ et $v'(a) = 1$, les fonctions v et v' sont strictement positives sur un intervalle de la forme $]a\,;a+h]$ (avec $h > 0$). En appliquant la question précédente avec $a + h$ plutôt que a, on assure que v et v' sont strictement positives sur $]a\,;+\infty[$. On peut donc introduire les fonctions u/v et u'/v'. Aussi

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2} \leq 0 \text{ et } \left(\frac{u'}{v'}\right)' = \frac{u''v' - u'v''}{v'^2} = \frac{q}{v'^2} \geq 0$$

On a

$$\frac{u}{v} - \frac{u'}{v'} = \frac{uv' - u'v}{vv'} = \frac{1}{vv'}$$

avec $v \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $v' \geq v'(a) = 1$. On en déduit que les fonctions u/v et u'/v' ont la même limite en $+\infty$ (ces limites existent assurément par monotonie). Aussi cette limite est finie car la fonction u/v est au dessus de la fonction u'/v'. Nous noterons ℓ cette limite.

(c) Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$g = \lambda u + \mu v$$

car (u,v) forme un système fondamentale de solutions de l'équation linéaire (E).
La condition $g(a) = 1$ impose $\lambda = 1$.
Les conditions g strictement positive et décroissante imposent respectivement

$$u + \mu v > 0 \text{ et } u' + \mu v' \leq 0$$

La constante μ est alors nécessairement $-\ell$.
Finalement $g = u - \ell v$. La réciproque est immédiate.

(d) Le changement de fonction proposé transpose l'équation $x^4y''(x) = y(x)$ en $z''(1/x) = z(1/x)$.
La solution générale de l'équation (E) sur $[1\,;+\infty[$ est donc

$$y(x) = x\left(\lambda \mathrm{e}^{1/x} + \mu \mathrm{e}^{-1/x}\right)$$

Par développement limité

$$y(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left((\lambda+\mu) + \mathrm{o}(1)\right)$$

Pour que la fonction g décroisse en restant positive, il est nécessaire que $\lambda + \mu = 0$.
Sachant $y(1) = \lambda\mathrm{e} + \mu/\mathrm{e}$, on obtient

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}x}{\mathrm{e}^2 - 1}\left(\mathrm{e}^{1/x} - \mathrm{e}^{-1/x}\right)$$

On aurait aussi pu calculer

$$u(x) = x\mathrm{e}^{1/x-1} \text{ et } v(x) = \frac{x}{2}\left(-\mathrm{e}^{1/x-1} + \mathrm{e}^{-1/x+1}\right)$$

et reprendre ce qui précède.

Exercice 61 : [énoncé]

(a) La solution générale de l'équation homogène associée est

$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t$$

On peut avoir l'intuition de trouver une solution particulière de la forme $y(t) = \alpha\cos(nt)$ et, en effet on obtient,

$$y(t) = \frac{-1}{n^2-1}\cos(nt)$$

solution particulière lorsque $n \neq 1$. La solution générale est alors

$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t + \frac{1}{1-n^2}\cos(nt)$$

Quand $n = 1$, on applique la méthode de variation des constantes. On obtient une solution particulière en résolvant

$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \cos(nt) \end{cases}$$

Par les formules de Cramer, on obtient

$$\lambda'(t) = -\sin t \cos t \text{ et } \mu'(t) = \cos^2(t)$$

Alors

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2}\sin^2 t \text{ et } \mu(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin(t)\cos(t)}{2}$$

conviennent et l'on obtient la solution particulière

$$y(t) = \frac{t}{2}\sin t$$

puis la solution générale

$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t + \frac{1}{2}t\sin t$$

(b) Soit

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{2}t\sin t + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$$

Sans difficultés, on peut dériver deux fois sous le signe somme car il y a convergence normale de la série des dérivées secondes et convergences simples intermédiaires. On peut alors conclure que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle étudiée. La solution générale de celle-ci est alors

$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t + f(t)$$

Exercice 62 : [énoncé]

(a) On résout l'équation différentielle linéaire étudiée et, par la méthode de variation de la constante, on obtient la solution générale suivante

$$g(x) = \lambda x + x\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par une intégration par parties, on peut écrire

$$g(x) = \lambda x - f(x) + xf(1) + x\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Quand $x \to 0^+$, on a

$$\left|x\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \|f'\|_{\infty,[0;1]}\,x\,|\ln x|$$

et on obtient

$$g(x) \to -f(0)$$

Quand $x \to 0^+$

$$\frac{1}{x}\left(g(x) - g(0)\right) = \lambda - \frac{f(x)-f(0)}{x} + f(1) + \int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Le terme $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ converge vers $f'(0)$.
Si $f'(0) \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{]0;1]}\frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge et donc le terme $\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. On en déduit qu'alors g n'est pas dérivable en 0.
L'égalité $f'(0) = 0$ est une condition nécessaire à la dérivabilité de g en 0.
Cette condition n'est pas suffisante. En effet considérons une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$

L'intégrale $\int_{]0;1]}\frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ demeure divergente alors que $f'(0) = 0$.

(b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f'(0) = 0$ on peut écrire

$$f(x) = f(0) + x^2\varphi(x) \text{ pour tout } x > 0$$

avec $\varphi\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et convergeant vers $f''(0)/2$ en 0^+.
On a alors pour tout $x > 0$

$$g(x) = \lambda x + xf(0) - f(0) + x\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0\,;+\infty[$ car φ y est de classe $\mathcal{C}^2$.
On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = -f(0)$

$$g'(x) = \lambda + f(0) + x\varphi(x) + \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Quand $x \to 0^+$, g' converge et donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.

$$g''(x) = 2\varphi(x) + x\varphi'(x)$$

Or

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x^2} - 2\frac{f(x)-f(0)}{x^3}$$

donc
$$g''(x) = \frac{f'(x)}{x} = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} f''(0)$$
On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,;+\infty[$

Exercice 63 : [énoncé]

(a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Après résolution via variation de la constante, on obtient la solution générale
$$y(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x}$$

(b) Par opérations, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1/2\,;+\infty[$.
Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$ on a le développement en série entière
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$
et si $x \neq 0$, on obtient
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$
Si l'on pose $g(0) = 1$, la relation précédente reste valable pour $x = 0$ et ainsi on a prolongé g en une fonction développable en série entière sur $\left]-1\,;1\right[$.
Ce prolongement est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-1\,;1\right[$ puis sur $\left]-1\,;+\infty\right[$.

(c) La fonction g est à valeurs strictement positives et on peut donc introduire la fonction f définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par
$$f(x) = \frac{1}{g(x-1)}$$
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sur $\left]0\,;1\right[$ ou $\left]1\,;+\infty\right[$
$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$
Ainsi f est solution de (E) sur $\left]0\,;1\right[$ et $\left]1\,;+\infty\right[$ et enfin on vérifie aisément que l'équation différentielle (E) est aussi vérifiée quand $x = 1$.

Exercice 64 : [énoncé]
On a
$$\exp\left(\frac{A}{n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\frac{A^k}{n^k} = I_p + \frac{1}{n}A + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
donc
$$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
Ainsi
$$\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \left(I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$
Puisque I et $\frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ commutent, on peut développer par la formule du binôme de Newton et obtenir :
$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}(A+B+\mathrm{o}(1))^k$$
Posons $f_k\colon \mathbb{N}^* \mapsto \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par
$$f_k(n) = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}(A+B+\mathrm{o}(1))^k \text{ si } k \leq n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$
On remarque que
$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$
Montrons la convergence normale de la série des f_k.
Puisque $A+B+\mathrm{o}(1) \to A+B$, la norme de $A+B+\mathrm{o}(1)$ est bornée par un certain M.
On observe alors $\|f_k\|_\infty \leq \frac{1}{k!}M^k$ en choisissant une norme multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
La série $\sum f_k$ converge normale sur $\mathbb{N}^*$, cela permet de permuter limite et somme infinie.
Or, pour k fixé, $f_k(n) \to \frac{(A+B)^k}{k!}$ quand $n \to +\infty$, donc
$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k$$

Exercice 65 : [énoncé]

(a) Supposons

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \cdots + \lambda_{p-1} N^{p-1} = O_n$$

En multipliant par N^{p-1} on obtient $\lambda_0 N^{p-1} = O_n$ car $N^p = O_n$. Or $N^{p-1} \neq O_n$ donc $\lambda_0 = 0$.
On montre de même successivement que $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{p-1} = 0$.
On conclut que la famille $(I_n, N, N^2, \ldots, N^{p-1})$ est libre.
Puisque λI_n et N commutent, on a

$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n + N)} = \mathrm{e}^{t\lambda I_n}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(I_n + \frac{t}{1!}N + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}N^{p-1}\right)$$

(b) Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et possède une unique racine λ, on a donc

$$\chi_A(X) = (X-\lambda)^n$$

En vertu du théorème de Cayley Hamilton

$$N^n = (A - \lambda I_n)^n = O_n$$

La matrice N s'avère donc nilpotente.
Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les fonctions

$$t \mapsto X(t) = \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{tN}X(0)$$

Si N est nulle et $\lambda \in i\mathbb{R}$, il est clair que toutes les solutions sont bornées.
Inversement, supposons les solutions toutes bornées. En choisissant $X(0) \in \ker N \setminus \{O_n\}$, la solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t}X(0)$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ et nécessairement $\lambda \in i\mathbb{R}$.
Notons p l'indice de nilpotence de N et choisissons $X(0) \notin \ker N^{p-1}$. La solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{tN}X(0)$$

devant être bornée avec $\left|\mathrm{e}^{\lambda t}\right| = 1$, la fonction

$$t \mapsto X(0) + tNX(0) + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)}N^{p-1}X(0)$$

est elle aussi bornée. Or $N^{p-1}X(0) \neq 0$ et donc cette solution ne peut pas être bornée si $p - 1 > 0$.
On en déduit $p = 1$ puis $N = O_n$.

(c) Les polynômes $(X - \lambda_k)^{n_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Par le théorème de Cayley Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, on obtient

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker(f - \lambda_k \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

Une base adaptée à cette décomposition fournit une représentation matricielle Δ de f diagonale par blocs. Plus précisément, les blocs diagonaux sont de la forme

$$\lambda_k \operatorname{Id}_{n_k} + N_k \text{ avec } N_k^{n_k} = O_{n_k}$$

(d) La matrice A est semblable à Δ et on peut donc écrire

$$A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible}$$

Les solutions de l'équation $X' = AX$ correspondent aux solutions de l'équation $Y' = \Delta Y$ via $Y = P^{-1}X$.
Les solutions de $X' = AX$ seront bornées si, et seulement si, celles de $Y' = \Delta Y$ le sont. En raisonnant par blocs et en exploitant le résultat du b), on peut affirmer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et les N_k tous nuls (ce qui revient à dire que A est diagonalisable).

(e) Supposons A antisymétrique réelle. Puisque A et ${}^tA$ commutent

$${}^t\overline{(\mathrm{e}^{tA})}\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\,{}^tA + tA} = \mathrm{e}^{O_n} = I_n$$

Soit $X\colon t \mapsto \mathrm{e}^{tA}.X(0)$ une solution de l'équation $X' = AX$. On a

$$\|X(t)\|^2 = {}^t\overline{X(t)}X(t) = {}^t\overline{X(0)}\,{}^t\overline{(\mathrm{e}^{tA})}\mathrm{e}^{tA}X(0) = \|X(0)\|^2$$

Les solutions sont toutes bornées et donc A est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.

Exercice 66 : [énoncé]

(a) Si $|y| \leq 1$ alors la série définissant $f(x,y)$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$
Si $|y| > 1$ alors la série définissant $f(x,y)$ converge si, et seulement si, $|x| < \left|y^2\right|$ car $\frac{x^n}{1+y^{2n}} = \left(\frac{x}{y^2}\right)^n$.
Finalement $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \max(1, y^2)\right\}$.

(b) $u_n(x,y) = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$. Soit $a \in [0\,;1[$ et $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq a\max(1,y^2)\right\}$.
Pour $(x,y) \in D_a$:

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right|$$

Si $|y| \leq 1$ alors $|x| \leq a$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right| \leq \frac{na^{n-1}}{1+y^{2n}} \leq na^{n-1}$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leq ay^2$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right| \leq \frac{na^{n-1}y^{2n-2}}{1+y^{2n}} \leq \frac{na^{n-1}}{y^2} \leq na^{n-1}$$

Dans les deux cas $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leq na^{n-1}$ qui est le terme général d'une série convergente.

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{2ny^{2n-1}x^n}{(1+y^{2n})^2}\right| \leq \frac{2nx^n}{1+y^{2n}} \text{ car } \frac{y^{2n-1}}{1+y^{2n}} \leq 1$$

Si $|y| \leq 1$ alors $|x| \leq a$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{2na^n}{1+y^{2n}} \leq 2na^n$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leq ay^2$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{2na^ny^{2n}}{1+y^{2n}} \leq 2na^n$$

Dans les deux cas $\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq 2na^n$ qui est le terme général d'une série convergente.
Par convergence normale, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D_a et comme ceci vaut pour tout $a \in [0\,;1[$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D.

Exercice 67 : [énoncé]

(a) On pose $\varphi(a,a) = -\sin a$ et on observe que $\varphi(x,y) \to \varphi(a,a)$ quand $(x,y) \to (a,a)$ avec $x \neq y$ et avec $x = y$.

(b) En vertu de

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

on a

$$\varphi(x,y) = -\operatorname{sinc}\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

avec sinc de classe $\mathcal{C}^\infty$ car développable en série entière.

Exercice 68 : [énoncé]
Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
On calcule les dérivées partielles de F

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1,\dots,x_n) &= \frac{x_i^2}{x_1^2+\dots+x_n^2} f''\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)\\ &+ \frac{x_1^2+\dots+\hat{x}_i^2+\dots+x_n^2}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{3/2}} f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)\end{aligned}$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = f''\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right) + \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)$$

Puisque $t = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ parcourt $\mathbb{R}_+^*$ quand $(x_1,\dots,x_n)$ parcourt $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'équation $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$ est vérifiée si, et seulement si, f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$f''(t) + \frac{(n-1)}{t} f'(t) = 0$$

Après résolution on obtient

$$f(t) = \frac{\lambda}{t^{n-2}} + \mu \text{ avec } \lambda,\mu \in \mathbb{R} \text{ si } n \neq 2 \text{ et } f(t) = \lambda \ln t + \mu \text{ si } n = 2$$

Exercice 69 : [énoncé]
L'étude des points critiques donne $(1,1)$ seul point critique.
La fonction $t \mapsto t^{\ln t}$ admet un minimum en 1, donc $(x,y) \mapsto x^{\ln x} + y^{\ln y}$ admet un minimum en $(1,1)$.

Exercice 70 : [énoncé]
Méthode analytique :
L'intérieur du triangle et son bord forment un compact. La fonction considérée est continue sur celui-ci donc admet un maximum. Celui-ci ne peut être au bord car la fonction prend des valeurs strictement positives alors qu'elle est nulle sur le

bord. Il existe donc un maximum à l'intérieur du triangle et celui-ci annule la différentielle de la fonction.
En introduisant un repère, $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(a,b)$ (ce qui est possible qui à appliquer une homothétie pour que $AB=1$) la fonction étudiée est

$$f(x,y) = y(bx-ay)(b(x-1)-(a-1)y)$$

On résout le système formé par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

Le calcul est très lourd sans logiciel de calcul formel mais on parvient à conclure.
Méthode géométrique (plus élégante) :
Le point M peut s'écrire comme barycentre des points A,B,C affectés de masses $a,b,c\geq 0$ vérifiant $a+b+c=1$.
L'aire du triangle (MBC) est donné par

$$\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})\right|$$

Or

$$\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BA}+b\overrightarrow{BB}+c\overrightarrow{BC}$$

donc

$$\det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}) = a\det(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$$

En notant $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC et d_A le distance de M à la droite (BC), on obtient

$$a=\frac{d_A.BC}{\mathcal{A}}$$

De façon analogue,

$$b=\frac{d_B AC}{\mathcal{A}} \text{ et } c=\frac{d_C AB}{\mathcal{A}}$$

avec des notations entendues.
Par suite, maximiser le produit $d_Ad_Bd_C$ équivaut à maximiser le produit abc avec les contraintes $a+b+c=1$ et $a,b,c\geq 0$
La maximisation de $ab(1-a-b)$ avec $a,b\geq 0$ et $a+b\leq 1$ conduit à $a=b=1/3$, d'où $c=1/3$ et le point M est au centre de gravité.

Exercice 71 : [énoncé]
L'étude des points critiques donne $(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$ seul point critique.
Posons $\alpha=\sqrt[3]{a}$.

$$f(x,y)-f(\alpha,\alpha) = x+y+\frac{\alpha^3}{xy}-3\alpha = \frac{x^2y+xy^2+\alpha^3-3\alpha xy}{xy}$$

Étudions $\varphi\colon \alpha\mapsto x^2y+xy^2+\alpha^3-3\alpha xy$. Cette application admet un minimum en $\sqrt{xy}$ de valeur

$$x^2y+xy^2-2xy\sqrt{xy} = xy(x+y-2\sqrt{xy}) = xy(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0$$

donc pour tout $x,y>0$,

$$f(x,y)\geq f(\alpha,\alpha)$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ et $\alpha=\sqrt{xy}$ *i.e.* $x=y=\alpha$.

Exercice 72 : [énoncé]
Supposons f homogène de degré p *i.e.*

$$\forall t>0, f(tx_1,\dots,tx_n) = t^pf(x_1,\dots,x_n)$$

En dérivant cette relation par rapport à t et en évaluant en $t=1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = pf(x_1,\dots,x_n)$$

Inversement, posons

$$g(t) = f(tx_1,\dots,tx_n)$$

Si f vérifie l'équation aux dérivées partielles proposée, la fonction $t\mapsto g(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$tg'(t) = pg(t)$$

et, après résolution, on obtient

$$g(t) = t^pg(1)$$

ce qui donne f homogène de degré p.
Notons que pour $n=1$, $f(x)=|x|^3$ vérifie la relation et n'est pas homogène de degré 3 que dans le sens précisé initialement.

Exercice 73 : [énoncé]

(a) immédiat.

(b) L'application $d_h : f \mapsto \mathrm{d}_h f(0)$ fait l'affaire pour n'importe quel $h \in \mathbb{R}^n$ non nul.

(c) Si h est constante égale à λ alors pour toute fonction $f \in E$ on a par linéarité

$$d(fh) = \lambda d(f)$$

et par définition des éléments de $\mathcal{D}$,

$$d(fh) = f(0)d(h) + \lambda d(f)$$

En employant une fonction f ne s'annulant pas en 0, on peut affirmer $d(h) = 0$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, puisque la fonction $\varphi : t \in [0\,;1] \mapsto f(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$.
Toutes les dérivées partielles en x de $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ sont continues sur $K \times [0\,;1]$ donc bornées.
Par domination sur tout compact, on peut affirmer que la fonction $f_i : x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(e) Notons $p_i : x \mapsto x_i$.
Par linéarité de d, on a

$$d(f) = \sum_{i=1}^n d(p_i f_i) = \sum_{i=1}^n d(p_i) f_i(0)$$

car $d(f(0)) = 0$ et $p_i(0) = 0$.
En posant $a_i = d(p_i)$ et sachant

$$f_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

on obtient

$$\forall f \in E, d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

(f) L'application qui à $h \in \mathbb{R}^n$ associe d_h est donc une surjection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{D}$.
Cette application est linéaire et aussi injective (prendre $f : x \mapsto (h \mid x)$ pour vérifier $d_h = 0 \implies h = 0$) c'est donc un isomorphisme et

$$\dim \mathcal{D} = n$$