

# Calcul asymptotique

## Comparaison de suites numériques

### Exercice 1 [02281] [Correction]

Trouver un équivalent simple aux suites  $(u_n)$  suivantes et donner leur limite :

$$(a) u_n = \frac{1}{(n + 3 \ln n)e^{-(n+1)}} \quad (b) u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \quad (c) u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$$

### Exercice 2 [00236] [Correction]

Trouver un équivalent simple aux suites  $(u_n)$  suivantes et donner leur limite :

$$(a) u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln n - 2n^2} \quad (b) u_n = \frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2 + 1} \quad (c) u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$$

### Exercice 3 [02282] [Correction]

Trouver un équivalent simple aux suites  $(u_n)$  suivantes :

$$(a) u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \quad (b) u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}} \quad (c) u_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}}$$

### Exercice 4 [00235] [Correction]

Trouver un équivalent simple aux suites  $(u_n)$  suivantes :

$$(a) u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad (b) u_n = \ln \left( \sin \frac{1}{n} \right) \quad (c) u_n = 1 - \cos \frac{1}{n}$$

### Exercice 5 [01472] [Correction]

Déterminer un équivalent simple de la suite dont le terme général est :

$$(a) \frac{2\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}} \quad (b) \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \quad (c) {}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

### Exercice 6 [02287] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

- (a) Montrer que  $(u_n)$  converge vers  $0^+$ .  
 (b) Donner un équivalent simple de  $(u_n)$ .

### Exercice 7 [02286] [Correction]

Soient  $(u_n), (v_n), (w_n), (t_n)$  des suites de réels strictement positifs telles que

$$u_n \sim v_n \text{ et } w_n \sim t_n.$$

Montrer que

$$u_n + w_n \sim v_n + t_n.$$

### Exercice 8 [02284] [Correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n = 0! + 1! + 2! + \cdots + n! = \sum_{k=0}^n k!.$$

Montrer que  $u_n \sim n!$ .

### Exercice 9 [02285] [Correction]

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

- (a) Justifier que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- (b) Déterminer la limite de  $(S_n)$ .  
 (c) On pose  $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$ . Montrer que  $(u_n)$  converge.  
 (d) Donner un équivalent simple de  $(S_n)$ .

**Exercice 10** [00301] [Correction]

On étudie ici la suite  $(S_n)$  de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

(a) Établir que pour tout  $t > -1$ ,  $\ln(1+t) \leq t$  et en déduire

$$\ln(1+t) \geq \frac{t}{t+1}.$$

(b) Observer que

$$\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln n + 1$$

et en déduire un équivalent simple de  $S_n$ .

(c) Montrer que la suite  $u_n = S_n - \ln n$  est convergente. Sa limite est appelée constante d'Euler et est usuellement notée  $\gamma$ .

**Exercice 11** [02459] [Correction]

Montrer que, au voisinage de  $+\infty$ ,

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

**Calcul de limites de suites numériques****Exercice 12** [02283] [Correction]

Déterminer la limite des suites  $(u_n)$  suivantes :

$$(a) u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}} \quad (b) u_n = \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^n \quad (c) u_n = \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

**Exercice 13** [01473] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( (n+1)^{1/n} - n^{1/n} \right)$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2}$$

**Exercice 14** [01474] [Correction]

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n.$$

**Exercice 15** [01475] [Correction]

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n.$$

**Calcul de développements asymptotiques de suites****Exercice 16** [01459] [Correction]

Réaliser un développement asymptotique de la suite considérée à la précision demandée :

- (a)  $u_n = \ln(n+1)$  à la précision  $1/n^2$   
 (b)  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$  à la précision  $1/n^2$   
 (c)  $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$  à la précision  $1/n$   
 (d)  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  à la précision  $1/n^2$ .

**Exercice 17** [00323] [Correction]

Développement asymptotique à trois termes de :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2}.$$

**Exercice 18** [01476] [Correction]

Former le développement asymptotique, en  $+\infty$ , à la précision  $1/n^2$  de

$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!.$$

**Exercice 19** [ 02788 ] [Correction]

Donner un développement asymptotique de  $\left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!\right)_{n \in \mathbb{N}}$  à la précision  $o(n^{-3})$ .

**Exercice 20** [ 05029 ] [Correction]

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

- (a) Établir que  $\ln(1+x) \leq x$  pour tout  $x \in ]-1; +\infty[$ .
- (b) Justifier que les suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  sont adjacentes.

On note  $\gamma$  leur limite commune<sup>1</sup>

- (a) Justifier le développement

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

## Étude asymptotique de suites de solutions d'une équation

**Exercice 21** [ 02289 ] [Correction]

Soit  $n$  un entier naturel et  $E_n$  l'équation  $x + \ln x = n$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

- (a) Montrer que l'équation  $E_n$  possède une solution unique notée  $x_n$ .
- (b) Montrer que la suite  $(x_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- (c) Donner un équivalent simple de la suite  $(x_n)$ .

**Exercice 22** [ 01477 ] [Correction]

Soit  $f: ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = \ln x + x.$$

- (a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $x_n$  tel que  $f(x_n) = n$ .

1. Il s'agit de la *constante d'Euler*,  $\gamma = 0.577$  à  $10^{-3}$  près.

- (b) Former le développement asymptotique de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à la précision  $(\ln n/n)$ .

**Exercice 23** [ 00311 ] [Correction]

- (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , justifier que l'équation

$$x + e^x = n$$

possède une unique solution  $x_n \in \mathbb{R}$ .

- (b) Déterminer la limite de  $(x_n)$  puis un équivalent de  $x_n$ .
- (c) Former un développement asymptotique à trois termes de  $x_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 24** [ 01478 ] [Correction]

Montrer que l'équation  $\tan x = \sqrt{x}$  possède une unique solution  $x_n$  dans chaque intervalle  $I_n = ]-\pi/2; \pi/2[ + n\pi$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Réaliser un développement asymptotique à quatre termes de  $x_n$ .

**Exercice 25** [ 02599 ] [Correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et l'équation

$$(E_n): x^n + x - 1 = 0.$$

- (a) Montrer qu'il existe une unique solution positive de  $(E_n)$  notée  $x_n$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ .
- (b) On pose  $y_n = 1 - x_n$ . Montrer que, pour  $n$  assez grand,

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq 2 \frac{\ln n}{n}$$

(on posera  $f_n(y) = n \ln(1-y) - \ln(y)$ ).

- (c) Montrer que  $\ln(y_n) \sim -\ln n$  puis que

$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

**Exercice 26** [ 00316 ] [Correction]

Montrer que l'équation  $x^n + x^2 - 1 = 0$  admet une unique racine réelle strictement positive pour  $n \geq 1$ . On la note  $x_n$ . Déterminer la limite  $\ell$  de la suite  $(x_n)$  puis un équivalent de  $x_n - \ell$ .

**Exercice 27** [00317] [Correction]

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on considère l'équation  $(E_n)$ :  $x^n = x + 1$  dont l'inconnue est  $x \geq 0$ .

- Montrer l'existence et l'unicité de  $x_n$  solution de  $(E_n)$ .
- Montrer que  $(x_n)$  tend vers 1.
- Montrer que  $(x_n)$  admet un développement limité à tout ordre. Donner les trois premiers termes de ce développement limité.

**Exercice 28** [00318] [Correction]

Pour  $n \geq 2$ , on considère le polynôme

$$P_n = X^n - nX + 1.$$

- Montrer que  $P_n$  admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée  $x_n$ .
- Déterminer la limite de  $x_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .
- Donner un équivalent de  $(x_n)$  puis le deuxième terme du développement asymptotique  $x_n$ .

**Exercice 29** [00312] [Correction]

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'équation  $x^n + \ln x = 0$  possède une unique solution  $x_n > 0$ .
- Déterminer la limite de  $x_n$ .
- On pose  $u_n = 1 - x_n$ . Justifier que  $nu_n \sim -\ln u_n$  puis déterminer un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 30** [02471] [Correction]

Soit  $f(x) = (\cos x)^{1/x}$  et  $(\mathcal{C})$  le graphe de  $f$ .

- Montrer l'existence d'une suite  $(x_n)$  vérifiant :
  - $(x_n)$  est croissante positive.
  - la tangente à  $(\mathcal{C})$  en  $(x_n, f(x_n))$  passe par  $O$ .
- Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de  $(x_n)$ .

**Exercice 31** [04139] [Correction]

On étudie l'équation  $\tan x = x$  d'inconnue  $x$  réelle.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que cette équation possède une unique solution  $x_n$  dans l'intervalle  $I_n = ]-\pi/2; \pi/2[ + n\pi$ .
- Déterminer un équivalent de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi définie.
- Réaliser un développement asymptotique à trois termes de  $x_n$ .

**Étude asymptotique de suites récurrentes****Exercice 32** [02302] [Correction]

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$$

- Montrer que  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
- Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
- Montrer que  $u_n \leq n$  puis que  $u_n = o(n)$ .
- Donner un équivalent simple de  $(u_n)$ .
- Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{n}$ .

**Comparaison de fonctions numériques****Exercice 33** [01821] [Correction]

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$(a) \frac{\sqrt{x^3+2}}{\sqrt[3]{x^2+3}} \quad (b) \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} \quad (c) \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

**Exercice 34** [00306] [Correction]

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand  $x \rightarrow +\infty$

$$(a) \frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 \quad (c) x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$$

$$(b) \sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)}$$

**Exercice 35** [01823] [Correction]

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand  $x \rightarrow 0$

$$(a) \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \quad (b) \tan x - \sin x \quad (c) e^x + x - 1$$

**Exercice 36** [00313] [Correction]

Déterminer un équivalent simple aux expressions suivantes quand  $x \rightarrow 0$

(a)  $\ln(1 + \sin x)$   
 (b)  $\ln(\ln(1 + x))$

(c)  $(\ln(1 + x))^2 -$

$(\ln(1 - x))^2$

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{\ln x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{\ln x} \right)^{\frac{\ln x}{x}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x}$

**Exercice 37** [00305] [Correction]

Déterminer un équivalent de  $\ln(\cos x)$  quand  $x \rightarrow (\pi/2)^-$

**Exercice 38** [01461] [Correction]

Déterminer un équivalent simple des fonctions proposées au voisinage de 0 :

(a)  $x(2 + \cos x) - 3 \sin x$

(b)  $x^x - (\sin x)^x$

(c)  $\arctan(2x) - 2 \arctan(x)$

**Exercice 39** [01824] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction décroissante telle que

$$f(x) + f(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

(a) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

(b) Donner un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .

**Calcul de limites de fonctions numériques****Exercice 40** [01822] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - x}{x + \cos x}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}}$

**Exercice 41** [00704] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin x}{x \ln x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + x^2}{\ln(x + x^2)}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$

**Exercice 42** [00705] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

**Exercice 43** [01462] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

**Exercice 44** [01463] [Correction]

Déterminer les limites suivantes :

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}} \right)^{1/(2-x)}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a}$  avec  $a > 0$

**Exercice 45** [03381] [Correction]

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) \ln(1-x).$$

**Exercice 46** [05028] [Correction]

(a) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles définies sur un intervalle dont  $a$  est une extrémité finie ou infinie. On suppose

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \quad \text{et} \quad g(x)(f(x) - 1) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Étudier la limite de  $f(x)^{g(x)}$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

(b) *Application:* Étudier

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right)^{\ln(x)}.$$

## Calcul de développements limités

### Exercice 47 [01447] [Correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- (a)  $DL_3(\pi/4)$  de  $\sin x$
- (b)  $DL_4(1)$  de  $\frac{\ln x}{x^2}$
- (c)  $DL_5(0)$  de  $\operatorname{sh} x \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch} x$ .

### Exercice 48 [00226] [Correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- (a)  $DL_3(0)$  de  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
- (b)  $DL_3(0)$  de  $\ln(1 + \sin x)$
- (c)  $DL_3(1)$  de  $\cos(\ln(x))$

### Exercice 49 [00745] [Correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- (a)  $DL_3(0)$  de  $\ln(1 + e^x)$
- (b)  $DL_3(0)$  de  $\ln(2 + \sin x)$
- (c)  $DL_3(0)$  de  $\sqrt{3 + \cos x}$

### Exercice 50 [00292] [Correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- (a)  $DL_3(0)$  de  $e^{\sqrt{1+x}}$
- (b)  $DL_3(0)$  de  $\ln(1 + \sqrt{1+x})$
- (c)  $DL_3(0)$  de  $\ln(3e^x + e^{-x})$

### Exercice 51 [01448] [Correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- (a)  $DL_2(0)$  de  $(1+x)^{1/x}$
- (b)  $DL_4(0)$  de  $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
- (c)  $DL_4(0)$  de  $\ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right)$

### Exercice 52 [01451] [Correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- (a)  $DL_3(0)$  de  $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
- (b)  $DL_2(0)$  de  $\frac{\arctan x}{\tan x}$
- (c)  $DL_2(1)$  de  $\frac{x-1}{\ln x}$

### Exercice 53 [00751] [Correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- (a)  $DL_3(0)$  de  $\frac{x-\sin x}{1-\cos x}$
- (b)  $DL_2(0)$  de  $\frac{\sin(x)}{\exp(x)-1}$
- (c)  $DL_3(0)$  de  $\frac{x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-1}$

### Exercice 54 [00231] [Correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- (a)  $DL_3(0)$  de  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
- (b)  $DL_3(0)$  de  $\sqrt{3 + \cos x}$
- (c)  $DL_2(0)$  de  $(1+x)^{1/x}$
- (d)  $DL_3(0)$  de  $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$

### Exercice 55 [01449] [Correction]

Former le  $DL_3(1)$  de  $\arctan x$

### Exercice 56 [01452] [Correction]

Déterminer les développements limités suivants :

- (a)  $DL_{10}(0)$  de  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$
- (b)  $DL_{1000}(0)$  de  $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$

### Exercice 57 [01453] [Correction]

Exprimer le développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  à l'aide de nombres factoriels.

**Exercice 58** [01454] [Correction]

Pour  $\alpha = -1/2$  et  $k \in \mathbb{N}$ , exprimer

$$\frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - k + 1)}{k!}$$

à l'aide de nombres factoriels.

En déduire une expression du  $DL_{2n+1}(0)$  de  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  puis du  $DL_{2n+2}(0)$  de  $\arcsin(x)$ .

**Exercice 59** [00233] [Correction]

Exprimer le développement limité général en 0 de  $\arcsin x$ .

**Exercice 60** [01455] [Correction]

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer le développement limité à l'ordre  $2n + 2$  de  $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ .  
On pourra commencer par calculer la dérivée de cette fonction.

**Exercice 61** [01456] [Correction]

Montrer que l'application  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = xe^{x^2}$  admet une application réciproque définie sur  $\mathbb{R}$  et former le  $DL_5(0)$  de  $f^{-1}$ .

**Exercice 62** [02519] [Correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

- (a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- (b)  $f$  admet-elle un développement limité en 0? si oui à quel ordre maximal?

## Applications à l'étude locale de fonctions

**Exercice 63** [01464] [Correction]

Soit  $f: ]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

Montrer que  $f$  peut être prolongée par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.

Quelle est alors la position relative de la courbe de  $f$  par rapport à sa tangente en ce point?

**Exercice 64** [01465] [Correction]

Soient  $a$  un réel non nul et  $f$  la fonction définie au voisinage de 0 par

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}.$$

Déterminer les éventuelles valeurs de  $a$  pour lesquelles  $f$  présente un point d'inflexion en 0.

**Exercice 65** [01466] [Correction]

Montrer que la fonction

$$f: x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

peut être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 66** [01470] [Correction]

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ .  
C'est ici un exemple de fonction non nulle dont tous les  $DL_n(0)$  sont nuls.

**Exercice 67** [01471] [Correction]

Soit  $f: ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

- (a) Montrer que  $f$  est convexe sur  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$ .
- (b) Montrer que, pour tout  $x > 1$  on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{x dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t \ln t}.$$

En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \ln 2$ . De même, établir :  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \ln 2$ .

- (c) On prolonge  $f$  par continuité en 1, en posant  $f(1) = \ln 2$ .  
Montrer que  $f$  ainsi prolongée est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0; +\infty[$ .  
Établir la convexité de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

## Calcul de développements asymptotiques de fonctions

### Exercice 68 [01457] [\[Correction\]](#)

Former le développement asymptotique en 0 de l'expression considérée à la précision demandée :

- (a)  $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$  à la précision  $x^{5/2}$
- (b)  $x^x$  à la précision  $(x \ln x)^2$

### Exercice 69 [01458] [\[Correction\]](#)

Former le développement asymptotique en  $+\infty$  de l'expression considérée à la précision demandée :

- (a)  $\sqrt{x+1}$  à la précision  $1/x^{3/2}$ .
- (b)  $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$  à la précision  $1/x^2$ .
- (c)  $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$  à la précision  $1/x^2$ .

### Exercice 70 [05030] [\[Correction\]](#)

Soit  $\varphi: ]-1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\varphi(s) = s - \ln(1+s)$  pour tout  $s > -1$ .

- (a) Montrer que  $\varphi$  définit par restriction aux intervalles  $]-1; 0]$  et  $[0; +\infty[$  une bijection  $\varphi_- : ]-1; 0] \rightarrow [0; +\infty[$  et une bijection  $\varphi_+ : [0; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[$ .
- (b) Donner un équivalent de  $\varphi(s)$  lorsque  $s$  tend vers 0 et en déduire des équivalents des bijections réciproques  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$  en 0 par valeurs supérieures.
- (c) Former un développement asymptotique à trois termes de  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$  en  $0^+$ .



## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

- (a)  $u_n = \frac{ne^{-n}}{e} \rightarrow 0$   
 (b)  $u_n \sim \frac{2 \ln n}{n} \rightarrow 0$   
 (c)  $u_n \sim n^{1/3} \rightarrow +\infty$ .

### Exercice 2 : [énoncé]

- (a)  $u_n \sim -\frac{1}{2}n \rightarrow -\infty$   
 (b)  $u_n \sim 2n \rightarrow +\infty$   
 (c)  $u_n \sim \frac{n!}{3^n} \rightarrow +\infty$

### Exercice 3 : [énoncé]

(a)

$$u_n = \frac{2}{n^2 - 1} \sim \frac{2}{n^2}.$$

(b)

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} + o(\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(c)

$$u_n = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \sim \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

car  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$  puisque  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

### Exercice 4 : [énoncé]

- (a)  $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$  car  $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$ .  
 (b)  $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0 \neq 1$  donc  $u_n \sim \ln \frac{1}{n} = -\ln n$ .  
 (c)  $u_n = 2 \sin^2 \frac{1}{2n} \sim \frac{1}{2n^2}$ .

### Exercice 5 : [énoncé]

(a)

$$2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{4n\sqrt{n}}.$$

(b)

$$\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\ln(1+1/n)}{\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n} - 1)} \sim \frac{1/n}{1/2n^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

(c)  ${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln n}{n}}$  or

$$e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} = 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right)^3 + o\left( \frac{(\ln n)^3}{n^3} \right)$$

et

$$e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^3 + o\left( \frac{(\ln n)^3}{n^3} \right)$$

donc

$${}^{n+1}\sqrt{n+1} - \sqrt[n]{n} = -\frac{\ln n}{n^2} + o\left( \frac{\ln n}{n^2} \right) \sim -\frac{\ln n}{n^2}.$$

### Exercice 6 : [énoncé]

(a)  $(u_n)$  est décroissante donc admet une limite  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

Puisque  $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n} \rightarrow 0^+$ , on a  $\ell + \ell = 0$  donc  $\ell = 0$ .

De plus, à partir d'un certain rang :  $2u_n \geq u_n + u_{n+1} > 0$

(b) Par monotonie

$$u_{n+1} + u_n \leq 2u_n \leq u_{n-1} + u_n$$

avec  $u_{n+1} + u_n \sim \frac{1}{n}$  et  $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$  donc  $2u_n \sim \frac{1}{n}$  puis

$$u_n \sim \frac{1}{2n}.$$

### Exercice 7 : [énoncé]

Supposons  $u_n \sim v_n$  et  $w_n \sim t_n$ . On a

$$\left| \frac{u_n + w_n}{v_n + t_n} - 1 \right| = \left| \frac{(u_n - v_n) + (w_n - t_n)}{v_n + t_n} \right|$$

donc

$$\left| \frac{u_n + w_n}{v_n + t_n} - 1 \right| \leq \frac{|u_n - v_n|}{v_n} + \frac{|w_n - t_n|}{t_n} = \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| + \left| \frac{w_n}{t_n} - 1 \right| \rightarrow 0.$$

**Exercice 8 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!$$

Or

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

et

$$0 \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-2} k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

donc

$$u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k! = n! + o(n!) \sim n!$$

**Exercice 9 :** [\[énoncé\]](#)

(a)

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(b)

$$S_n \geq \sum_{k=1}^n 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sqrt{n+1} - 2$$

puis  $S_n \rightarrow +\infty$ .

(c)  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq 0$  donc  $(u_n)$  est décroissante.

Or  $u_n = S_n - 2\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geq -2$  donc  $(u_n)$  est aussi minorée.  
Par suite  $(u_n)$  converge.

(d)

$$S_n = 2\sqrt{n} + u_n = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}.$$

**Exercice 10 :** [\[énoncé\]](#)

(a) On étudie la fonction  $t \mapsto t - \ln(1+t)$  pour établir la première inégalité. On en déduit

$$\ln\left(1 - \frac{t}{1+t}\right) \leq -\frac{t}{1+t}$$

donc

$$\ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \leq -\frac{t}{1+t}$$

puis l'inégalité voulue.

(b)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \ln(n+1)$$

et

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1/k}{1+1/k} \leq 1 + \ln\left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = 1 + \ln n.$$

On en déduit

$$S_n \sim \ln n.$$

(c)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1/n}{1+1/n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

donc  $(u_n)$  est décroissante. De plus  $u_n \geq \ln(n+1) - \ln n \geq 0$  donc  $(u_n)$  est minorée et par suite convergente.

**Exercice 11 :** [\[énoncé\]](#)

On peut calculer l'intégrale

$$u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2.$$

Or pour  $x > 0$ ,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$u_n = \arctan \frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

**Exercice 12 :** [\[énoncé\]](#)

(a)  $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$  car  $\frac{1}{n^2+1} \rightarrow 0$ . Par suite  $u_n \sim 1 \rightarrow 1$ .

- (b)  $u_n = e^{n \ln(1 + \sin \frac{1}{n})}$ ,  $\ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right) \sim \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$  donc  $n \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$  puis  $u_n \rightarrow e$ .
- (c)  $u_n = e^{\sqrt{n+1} \ln n - \sqrt{n} \ln(n+1)}$ ,  
 $\sqrt{n+1} \ln n - \sqrt{n} \ln(n+1) = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln n - \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .  
 Or  $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \ln n = \frac{\ln n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\ln n}{2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{\ln n}{2\sqrt{n}}$  et  
 $\sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right)$  donc  
 $\sqrt{n+1} \ln n - \sqrt{n} \ln(n+1) = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0$  donc  $u_n \rightarrow 1$ .

**Exercice 13 :** [énoncé]

- (a)  $n \sin \frac{1}{n} \sim \frac{n}{n} = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$
- (b)  $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln(n \sin \frac{1}{n})} = e^{-\frac{1}{6} + o(1)}$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{e}}$ .
- (c)  $n^2((n+1)^{1/n} - n^{1/n}) = e^{\frac{\ln n}{n}} n^2(e^{\frac{\ln(1+1/n)}{n}} - 1) \sim e^{\frac{\ln n}{n}}$  donc  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2((n+1)^{1/n} - n^{1/n}) = 1$

**Exercice 14 :** [énoncé]

On a

$$\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} = \frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} = \frac{e^{\frac{\ln a}{n}} + e^{\frac{\ln b}{n}}}{2} = 1 + \frac{\ln a + \ln b}{2n} + o(1/n)$$

donc

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = e^{n(\ln(1 + \frac{\ln a + \ln b}{2n} + o(1/n)))} = e^{\frac{\ln a + \ln b}{2} + o(1)} \rightarrow \sqrt{ab}.$$

**Exercice 15 :** [énoncé]

On a

$$3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3} = 3e^{\frac{1}{3} \ln 2} - 2e^{\frac{1}{3} \ln 3} = 1 + \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$(3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3})^n = e^{n \ln(3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3})} = e^{\ln(8/9) + o(1)} \rightarrow \frac{8}{9}.$$

**Exercice 16 :** [énoncé]

- (a)  $\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .
- (b)  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{8n^{5/2}} + o\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$ .
- (c)  $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{n}} + \frac{1}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .
- (d)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Exercice 17 :** [énoncé]

Pour  $x \in [0; 1]$ ,

$$\left| \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 \right| \leq \frac{1}{120}.$$

On a donc

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \frac{k^3}{n^6} + M_n$$

avec

$$|M_n| \leq \frac{1}{120} \sum_{k=1}^n \frac{k^5}{n^{10}} \leq \frac{1}{120} \frac{1}{n^4}$$

donc  $M_n = o(1/n^3)$ .

Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

et

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \sim \frac{1}{4n^2}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Exercice 18 :** [énoncé]

On a

$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!}.$$

Or

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-4} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-4} \frac{(n-4)!}{n!} \leq n \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Exercice 19 : [énoncé]**

On a

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!}.$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!} \leq (n-4) \frac{(n-5)!}{n!} = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

**Exercice 20 : [énoncé]**

- (a) Cette inégalité fameuse a déjà été justifiée dans le sujet 4898.
- (b) Pour tout <sup>2</sup>  $n \geq 2$ ,

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{x=1/n}{\geq} 0$$

$$b_n - b_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{x=-1/n}{\leq} 0$$

et

$$b_n - a_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Les suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  sont donc adjacentes.

2. Il est ici plus commode d'étudier la monotonie de la suite  $(a_n)$  en déterminant le signe de  $a_n - a_{n-1}$  plutôt que celui de  $a_{n+1} - a_n$ .

- (c) Lorsqu'une suite  $(u_n)$  possède une limite finie  $\ell$ , on peut écrire  $u_n = \ell + o(1)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Puisque la suite  $(b_n)$  tend vers  $\gamma$ , on peut écrire

$$b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \gamma + o(1).$$

Cette égalité se transforme immédiatement en celle souhaitée<sup>3</sup>

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

**Exercice 21 : [énoncé]**

- (a) Le tableau de variation de  $f: x \mapsto x + \ln x$  permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$ . L'équation  $E_n$  possède alors pour solution unique  $x_n = f^{-1}(n)$ .
- (b) Le tableau de variation de  $f^{-1}$  donne  $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$ . Par suite  $x_n \rightarrow +\infty$ .
- (c)  $x_n \rightarrow +\infty$  donne  $\ln x_n = o(x_n)$ . La relation  $x_n + \ln x_n = n$  donne alors  $x_n + o(x_n) = n$  et donc  $x_n \sim n$ .

**Exercice 22 : [énoncé]**

- (a) La fonction  $f: x \mapsto x + \ln x$  réalise une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$  d'où l'existence de  $(x_n)$ .
- (b) Comme  $n \rightarrow +\infty$ ,  $x_n = f^{-1}(n) \rightarrow +\infty$ . Par suite  $\ln x_n = o(x_n)$  et  $n = x_n + \ln x_n \sim x_n$ .  
Donc  $x_n = n + o(n)$ .  
Soit  $y_n = x_n - n$ . On a :

$$y_n = -\ln x_n = -\ln(n + o(n)) = -\ln n + \ln(1 + o(1)) = -\ln n + o(1).$$

Donc

$$x_n = n - \ln n + o(1).$$

Soit  $z_n = y_n + \ln n$ . On a :

$$z_n = -\ln(n - \ln(n) + o(1)) + \ln n = -\ln\left(1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Donc

$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

3. En particulier en en déduit  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$ .

**Exercice 23 :** [énoncé]

(a) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x + e^x$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(b)  $f(x_n) = n \leq n + 1 = f(x_{n+1})$  donc  $x_n \leq x_{n+1}$  car  $f^{-1}$  est croissante. Si  $(x_n)$  est majorée par  $M$  alors  $f(x_n) = n \leq f(M)$  ce qui est absurde. La suite  $(x_n)$  étant croissante et non majorée, elle diverge vers  $+\infty$ .  $x_n = o(e^{x_n})$  donc  $e^{x_n} \sim n \rightarrow +\infty \neq 1$  puis  $x_n \sim \ln n$ .

(c) Posons  $y_n = x_n - \ln n = o(\ln n)$ . On a  $y_n + \ln n + ne^{y_n} = n$  donc

$$e^{y_n} = 1 - \frac{y_n}{n} - \frac{\ln n}{n} \rightarrow 1$$

d'où  $y_n \rightarrow 0$  et

$$e^{y_n} = 1 + y_n + o(y_n).$$

On a alors  $y_n + \ln n + n(1 + y_n + o(y_n)) = n$  d'où  $ny_n + o(ny_n) = -\ln n$  et

$$y_n \sim -\frac{\ln n}{n}.$$

Par suite

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

On écrit  $y_n = -\frac{\ln n}{n} + z_n$  et

$$e^{y_n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + z_n + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

donc

$$-\frac{\ln n}{n} + z_n + nz_n + \frac{1}{2}\frac{(\ln n)^2}{n} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n}\right) = 0$$

puis

$$z_n \sim -\frac{(\ln n)^2}{2n^2}.$$

Finalement

$$x_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} - \frac{(\ln n)^2}{2n^2} + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).$$

**Exercice 24 :** [énoncé]

Sur  $I_n$ , la fonction  $f: x \mapsto \tan x - \sqrt{x}$  est continue, croît strictement de  $-\infty$  vers  $+\infty$ .

Cela assure l'existence et l'unicité de  $x_n$ .

On a

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$$

donc  $x_n \sim n\pi$ .

Posons  $y_n = x_n - n\pi$ . On a  $\tan y_n = \sqrt{x_n}$  et  $y_n \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  donc

$$y_n = \arctan \sqrt{x_n} \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Posons

$$z_n = \frac{\pi}{2} - y_n = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{x_n} = \arctan \frac{1}{\sqrt{x_n}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}}.$$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

donc

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\pi n^3}} - \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi^3 n^3}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Finalement

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}} + \frac{3 + 4\pi}{12\pi^{3/2}} \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

**Exercice 25 :** [énoncé]

(a) On introduit  $\varphi_n(x) = x^n + x - 1$ .  $\varphi'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ ,  $\varphi_n$  est continue strictement croissante et réalise une bijective et de  $[0; +\infty[$  vers  $[-1; +\infty[$  d'où l'existence et l'unicité de  $x_n$ . On a  $\varphi_n(1) = 1$  donc  $x_n \in ]0; 1[$ . Si  $x_{n+1} < x_n$  alors  $x_{n+1}^{n+1} < x_n^n$  puis

$$x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$$

ce qui est absurde. On en déduit que  $(x_n)$  est croissante et étant majorée cette suite converge. Posons  $\ell$  sa limite,  $\ell \in ]0; 1[$ . Si  $\ell < 1$  alors  $x_n^n + x_n - 1 = 0$  donne à la limite  $\ell - 1 = 0$  ce qui est absurde. Il reste  $\ell = 1$ .

(b)  $f_n$  est strictement décroissante sur  $]0; 1[$ ,  $f_n(y_n) = 0$ ,

$$f_n\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \sim \frac{\ln n}{2} > 0 \text{ et } f_n\left(\frac{2\ln n}{n}\right) \sim -\ln n < 0$$

donc à partir d'un certain rang

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq 2\frac{\ln n}{n}.$$

(c)

$$\ln\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \leq \ln y_n \leq \ln\left(2\frac{\ln n}{n}\right)$$

donne  $\ln(y_n) \sim -\ln n$  puis  $n \ln(1 - y_n) = \ln y_n$  donne  $-ny_n \sim -\ln n$  puis  $y_n \sim \frac{\ln n}{n}$  et finalement

$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

**Exercice 26 : [énoncé]**

Posons  $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$ . L'étude de la fonction  $f_n$  assure l'existence et l'unicité d'une solution  $x_n \in \mathbb{R}_+$  à l'équation étudiée. De plus, on observe que  $x_n \in [0; 1]$ .

Puisque  $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$ , on peut affirmer  $x_{n+1} \geq x_n$ .

La suite  $(x_n)$  est croissante et majorée donc converge vers un réel  $\ell$ .

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in [0; 1]$ , à la limite  $\ell \in [0; 1]$ .

Si  $\ell < 1$  alors

$$0 \leq x_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$$

et la relation  $x_n^n + x_n^2 - 1 = 0$  donne à la limite  $\ell^2 = 1$  ce qui est absurde.

On conclut que  $\ell = 1$ .

Posons  $u_n = 1 - x_n$ ,

On a

$$(1 - u_n)^n = u_n(2 - u_n)$$

donc

$$n \ln(1 - u_n) = \ln u_n + \ln(2 - u_n)$$

d'où

$$-nu_n \sim \ln u_n \text{ puis } \ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$$

or

$$\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$$

donc

$$\ln u_n \sim -\ln n$$

puis

$$u_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

et enfin

$$x_n - 1 \sim -\frac{\ln n}{n}.$$

**Exercice 27 : [énoncé]**

(a) Il suffit d'étudier  $f_n: x \mapsto x^n - (x + 1)$ .

(b)  $f_n(1) \leq 0$  donc  $x_n \geq 1$ . De plus

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (x_n + 1) = x_n(x_n + 1) - (x_n + 1) = (x_n - 1)(x_n + 1) \geq 0$$

donc  $x_{n+1} \leq x_n$ . La suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers  $\ell \geq 1$ .

Si  $\ell > 1$  alors  $x_n^n \geq \ell^n \rightarrow +\infty$  or  $x_n^n = x_n + 1 \rightarrow \ell + 1$ . Ce qui est impossible et il reste  $\ell = 1$ .

(c) On a

$$x^n = x + 1 \iff n \ln x = \ln(x + 1) \iff g(x) = \frac{1}{n}$$

avec

$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln(x + 1)}$$

définie sur  $[1; +\infty[$ . La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $g'(x) > 0$  donc  $g$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  vers  $[0; 1[$ , de plus (puisque  $g'(x) \neq 0$ )  $g^{-1}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et donc  $g^{-1}$  admet un  $DL_n(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc

$x_n = g^{-1}(1/n)$  admet un développement limité à tout ordre.

Formons ses trois premiers termes

$$g^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$$

$a = g^{-1}(0) = 1$ .  $g(g^{-1}(x)) = x$  donc

$$\ln(1 + bx + cx^2 + o(x^2)) = x \ln(2 + bx + o(x^2))$$

puis

$$bx + \left(c - \frac{b^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) = \ln(2)x + \frac{b}{2}x^2 + o(x^2)$$

donc

$$b = \ln 2 \text{ et } c = \frac{(1 + \ln(2)) \ln(2)}{2}.$$

Finalement

$$x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(1 + \ln(2)) \ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Exercice 28 :** [énoncé]

(a) La fonction  $x \mapsto P_n(x)$  est strictement décroissante sur  $[0; 1]$  car

$$P'_n(x) = n(x^{n-1} - 1)$$

est strictement négatif sauf pour  $x = 1$ .

La fonction continue  $P_n$  réalise donc une bijection strictement décroissante de  $[0; 1]$  vers  $[P_n(1); P_n(0)] = [2 - n; 1]$ .

On en déduit l'existence et l'unicité de la solution  $x_n$  à l'équation  $P_n(x) = 0$ .

(b) Puisque  $x_n \in [0; 1]$ , on a  $x_n^{n+1} \leq x_n^n$  puis

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leq P_n(x_n) = 0.$$

Ainsi  $P_{n+1}(x_n) \leq P_{n+1}(x_{n+1})$  et donc  $x_{n+1} \leq x_n$  car la fonction  $P_{n+1}$  est strictement décroissante.

La suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel  $\ell \in [0; 1]$ .

Si  $\ell > 0$  alors

$$P_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 \rightarrow -\infty$$

ce qui est absurde. On conclut  $\ell = 0$ .

(c) On a

$$\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n} x_n^{n-1} \rightarrow 0$$

et donc  $x_n^n = o(nx_n)$ .

Sachant  $x_n^n - nx_n + 1 = 0$ , on obtient  $nx_n \sim 1$  puis

$$x_n \sim \frac{1}{n}.$$

Écrivons ensuite

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Puisque  $x_n^n = nx_n - 1$ , on a

$$\varepsilon_n = x_n^n = \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} \geq 0.$$

Nous allons montrer

$$(1 + \varepsilon_n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

ce qui permettra de déterminer un équivalent de  $\varepsilon_n$  puis de conclure.

Puisque  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , pour  $n$  assez grand, on a  $|1 + \varepsilon_n| \leq 2$  et alors

$$\varepsilon_n = \frac{(1 + \varepsilon_n)^n}{n^n} \leq \frac{2^n}{n^n}.$$

On en déduit

$$1 \leq (1 + \varepsilon_n)^n \leq \left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right)\right).$$

Or

$$n \ln\left(1 + \frac{2^n}{n^n}\right) \sim \frac{2^n}{n^{n-1}} \rightarrow 0$$

et par encadrement

$$(1 + \varepsilon_n)^n \rightarrow 1.$$

On peut conclure  $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$  et finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + o\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right).$$

**Exercice 29 :** [énoncé]

(a) Soit  $f_n : x \mapsto x^n + \ln x$ . On a

$x$	0	1	$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\nearrow +\infty$

d'où l'existence et l'unicité de  $x_n$  avec en plus la propriété  $x_n \in ]0; 1[$ .

(b) On a

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + \ln(x_n) = (1 - x_n) \ln(x_n) < 0$$

donc  $x_{n+1} \geq x_n$ . La suite  $(x_n)$  est croissante et majorée par 1 donc converge vers  $\ell \in ]0; 1]$ .

Si  $\ell < 1$  alors

$$0 = x_n^n + \ln x_n \rightarrow -\ln \ell$$

car  $0 \leq x_n^n \leq \ell^n \rightarrow 0$ .

Ceci est impossible. Il reste  $\ell = 1$ .

- (c)  $(1 - u_n)^n = -\ln(1 - u_n) \sim u_n \rightarrow 0 \neq 1$   
 donc  $n \ln(1 - u_n) \sim \ln u_n$  puis  $nu_n \sim -\ln u_n \rightarrow +\infty \neq 1$ .  
 $\ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$  donc  $\ln n = -\ln u_n + \ln(-\ln u_n) + o(\ln(-\ln u_n))$  or  
 $\ln(-\ln u_n) = o(\ln u_n)$  donc  $\ln n \sim -\ln u_n$  puis

$$u_n \sim -\frac{\ln u_n}{n} \sim \frac{\ln n}{n}.$$

**Exercice 30 : [énoncé]**

- (a) La fonction  $f$  est définie et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$  avec

$$I_k = ]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi[.$$

Pour  $x \in \mathcal{D}$ , la tangente en  $(x, f(x))$  passe par  $O$  si, et seulement si,  
 $xf'(x) = f(x)$ .

Après transformation, ceci équivaut pour  $x > 0$  à l'équation

$$x \tan x + \ln(\cos(x)) + x = 0.$$

Posons  $\varphi(x) = x \tan x + \ln(\cos(x)) + x$ .

$\varphi$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{D}$ .

$\varphi'(x) = x(1 + \tan^2 x) + 1 > 0$  sur  $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+^*$ .

Quand  $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^-$ ,  $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ . Quand  $x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^+$ ,

$\varphi(x) \rightarrow -\infty$ .

$\varphi|_{I_k}$  réalise donc une bijection de  $I_k$  vers  $\mathbb{R}$  (pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ).

La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  avec  $x_n = (\varphi|_{I_n})^{-1}(0)$  est solution.

- (b) Evidemment  $x_n \sim 2n\pi$  et donc  $x_n = 2n\pi + y_n$ .

Après calculs, on obtient

$$(2n\pi + y_n)(\cos y_n + \sin y_n) = -\cos(y_n) \ln(\cos y_n).$$

La fonction  $t \mapsto t \ln t$  est bornée sur  $]0; 1]$  car prolongeable par continuité en 0 et donc

$$\cos y_n + \sin y_n = -\frac{\cos y_n \ln(\cos y_n)}{2n\pi + y_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Sachant  $|y_n| < \pi/2$ , on en déduit  $y_n \rightarrow -\pi/4$ .

On conclut

$$x_n = 2n\pi - \frac{\pi}{4} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Exercice 31 : [énoncé]**

- (a) Sur  $I_n$ , la fonction  $f_n: x \mapsto \tan x - x$  est continue et croît strictement de  $-\infty$  vers  $+\infty$ . Elle réalise donc une bijection de  $I_n$  vers  $\mathbb{R}$ . L'équation  $f_n(x) = 0$  possède alors une unique solution dans  $I_n$ .

- (b) Puisque  $x_n$  est un élément de  $I_n$ , on dispose de l'encadrement

$$-\frac{\pi}{2} + n\pi < x_n < \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

On en déduit

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi.$$

- (c) Posons

$$y_n = x_n - n\pi.$$

On a

$$\tan y_n = x_n \text{ avec } y_n \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

et donc

$$y_n = \arctan x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

On peut ainsi déjà écrire le développement asymptotique à deux termes

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Déterminons un équivalent de ce  $o(1)$  en étudiant

$$z_n = \frac{\pi}{2} - y_n = \frac{\pi}{2} - \arctan x_n.$$

Sachant

$$\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

on obtient

$$z_n = \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}.$$

Finalement

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Exercice 32 : [énoncé]**



- (a)  $u_n \geq \sqrt{n} \rightarrow +\infty$ .  
 (b)  $u_{n+1} = \sqrt{(n+1) + u_n}$ .  
 (c) Montrons par récurrence sur  $n \geq 1$  que  $u_n \leq n$ .  
 Pour  $n = 1$  : ok  
 Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 1$ .

$$u_{n+1} = \sqrt{(n+1) + u_n} \stackrel{HR}{\leq} \sqrt{(n+1) + n} \leq n+1.$$

Récurrence établie.

$$0 \leq u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \sqrt{n + (n-1)} = O(\sqrt{n})$$

donc  $u_n = O(\sqrt{n}) = o(n)$ .

- (d)  $u_n = \sqrt{n + o(n)} \sim \sqrt{n}$   
 (e)

$$u_n - \sqrt{n} = \frac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}}$$

or  $u_{n-1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$  et  $u_n + \sqrt{n} = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$  donc

$$u_n - \sqrt{n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

### Exercice 33 : [énoncé]

- (a) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{\sqrt{x^3 + 2}}{\sqrt[3]{x^2 + 3}} \sim \frac{x^{3/2}}{x^{2/3}} = x^{5/6}.$$

- (b) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} = x + o(x) + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x.$$

- (c) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2}{x + o(x) + x + o(x)} \sim \frac{1}{x}.$$

### Exercice 34 : [énoncé]

- (a) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 = \frac{\ln(1 + 1/x)}{\ln x} \sim \frac{1}{x \ln x}.$$

- (b) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} = \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)}}.$$

Or

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \sim \frac{2}{x-1} \sim \frac{2}{x}$$

et

$$\sqrt{\ln(x+1)} + \sqrt{\ln(x-1)} = 2\sqrt{\ln x} + o(\sqrt{\ln x}) \sim 2\sqrt{\ln x}$$

donc

$$\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} \sim \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}.$$

- (c) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$x \ln(x+1) - (x+1) \ln x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln x = 1 + o(1) - \ln x \sim -\ln x.$$

### Exercice 35 : [énoncé]

- (a) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \sim \frac{2x^2}{2} = x^2.$$

- (b) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$\tan x - \sin x = \tan x(1 - \cos x) = 2 \tan x \sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^3}{2}.$$

- (c) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$e^x - 1 \sim x$$

donc

$$e^x + x - 1 = x + x + o(x) = 2x + o(x) \sim 2x.$$

**Exercice 36 :** [énoncé](a) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$\ln(1 + \sin x) \sim \sin x$$

car  $\sin x \rightarrow 0$ , or

$$\sin x \sim x$$

donc

$$\ln(1 + \sin x) \sim x.$$

(b) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$\ln(1 + x) \sim x \rightarrow 0 \neq 1$$

donc

$$\ln(\ln(1 + x)) \sim \ln(x).$$

(c) Quand  $x \rightarrow 0$ ,

$$\ln(1 + x)^2 - \ln(1 - x)^2 = (\ln(1 + x) + \ln(1 - x))(\ln(1 + x) - \ln(1 - x))$$

or

$$\ln(1 + x) + \ln(1 - x) = \ln(1 - x^2) \sim -x^2$$

et

$$\ln(1 + x) - \ln(1 - x) = x + o(x) - (-x + o(x)) = 2x + o(x)$$

donc

$$(\ln(1 + x))^2 - (\ln(1 - x))^2 \sim -2x^3.$$

**Exercice 37 :** [énoncé]Quand  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ , posons  $x = \frac{\pi}{2} - h$  avec  $h \rightarrow 0^+$ 

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \sin h.$$

Or

$$\sin h \sim h \rightarrow 0 \neq 1$$

donc

$$\ln \sin h \sim \ln h$$

puis

$$\ln \cos x \sim \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

**Exercice 38 :** [énoncé]

Par développements limités :

$$(a) \quad x(2 + \cos x) - 3 \sin x \sim \frac{1}{60}x^5$$

$$(b) \quad x^x - (\sin x)^x = x^x \left(1 - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x\right) \sim \frac{1}{6}x^3$$

$$(c) \quad \arctan(2x) - 2 \arctan(x) \sim -2x^3$$

**Exercice 39 :** [énoncé](a)  $f$  est décroissante donc possède une limite  $\ell$  en  $+\infty$ .Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow \ell$  et  $f(x+1) \rightarrow \ell$  donc

$$f(x) + f(x+1) \rightarrow 2\ell$$

or

$$f(x) + f(x+1) \sim \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

donc  $\ell = 0$ .(b) Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a

$$f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1)$$

donc

$$2f(x) \sim \frac{1}{x}$$

puis

$$f(x) \sim \frac{1}{2x}.$$

**Exercice 40 :** [énoncé](a) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x} \sim \frac{x^2}{x} = x \rightarrow +\infty.$$

(b) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{x \ln x - x}{x + \cos x} \sim \frac{x \ln x}{x} = \ln x \rightarrow +\infty.$$

(c) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{\sqrt{xe^x - x^2}}{e^x + e^{-x}} \sim \sqrt{x}e^{-x/2} \rightarrow 0.$$

**Exercice 41 : [énoncé]**

(a) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$\frac{x + \sin x}{x \ln x} = \frac{x + x + o(x)}{x \ln x} \sim \frac{2}{\ln x} \rightarrow 0.$$

(b) Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$\ln x + x^2 = \ln x + o(\ln x)$$

et puisque

$$x + x^2 \sim x \rightarrow 0 \neq 1$$

on a

$$\ln(x + x^2) \sim \ln x$$

donc

$$\frac{\ln x + x^2}{\ln(x + x^2)} \sim \frac{\ln x}{\ln x} = 1 \rightarrow 1.$$

(c) Quand  $x \rightarrow 1$ , on peut écrire  $x = 1 + h$  avec  $h \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{\ln(1+h)}{2h+h^2} \sim \frac{h}{2h} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

**Exercice 42 : [énoncé]**

(a) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{x^{\ln x}}{\ln x} = e^{(\ln x)^2 - \ln \ln x} = e^{(\ln x)^2 + o(\ln x)^2} \rightarrow +\infty.$$

(b) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x} \ln x - \frac{\ln x}{x} \ln \ln x} = e^{\frac{(\ln x)^2}{x} + o\left(\frac{(\ln x)^2}{x}\right)} \rightarrow 1.$$

(c) Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln x} = \frac{\ln(2x + o(x))}{\ln x} \sim \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln x} \sim 1 \rightarrow 1.$$

**Exercice 43 : [énoncé]**

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} = -\frac{e}{2}.$

**Exercice 44 : [énoncé]**

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2^x + 3^x}{2^{x+1} + 5^{x/2}}\right)^{1/(2-x)} = \frac{1}{3} 6^4 / 13^5 5^{5/26}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x} = e$

(c)  $x^a - a^x \sim a^a(1 - \ln a)(x - a)$  si  $a \neq 1$  et  $\arctan(x) - \arctan(a) \sim (\arctan(a))'(x - a) = \frac{(x-a)}{1+a^2}.$

Si  $a \neq 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = a^a(1 + a^2)(1 - \ln a).$$

Si  $a = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan x - \arctan a} = 2.$$

**Exercice 45 : [énoncé]**

Posons  $x = 1 - h$ .

Quand  $x \rightarrow 1^-$ , on a  $h \rightarrow 0^+$  et

$$\ln(x) \ln(1 - x) = \ln(1 - h) \ln h \sim -h \ln h \rightarrow 0.$$

**Exercice 46 : [énoncé]**

(a) Si  $f(x)$  est de limite 1, on montre que  $\ln(f(x))$  équivaut à  $f(x) - 1$ .

Par l'écriture exponentielle,

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln(f(x))).$$

Cependant,

$$\ln(f(x)) = \ln(1 + u) \quad \text{avec} \quad u = f(x) - 1 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

et donc

$$\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x) - 1 \quad \text{puis} \quad g(x) \ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)(f(x) - 1).$$

Par composition de limites, on conclut

$$f(x)^{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} e^\ell.$$

(b) On observe

$$\frac{1}{x} + \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(2)}{\ln(x)} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

et

$$\begin{aligned} \ln(x) \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} - 1 \right) &= \frac{\ln(x)}{x} + \ln(2x) - \ln(x) \\ &= \frac{\ln(x)}{x} + \ln(2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(2). \end{aligned}$$

Le résultat qui précède donne alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right)^{\ln(x)} = e^{\ln(2)} = 2.$$

#### Exercice 47 : [énoncé]

- (a)  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + o((x - \frac{\pi}{4})^3)$   
 (b)  $\frac{\ln x}{x^2} = (x - 1) - \frac{5}{2}(x - 1)^2 + \frac{13}{3}(x - 1)^3 - \frac{77}{12}(x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$   
 (c)  $\operatorname{sh} x \operatorname{ch}(2x) - \operatorname{ch} x = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{121}{120}x^5 + o(x^5)$ .

#### Exercice 48 : [énoncé]

- (a)  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$   
 (b)  $\ln(1 + \sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$   
 (c)  $\cos(\ln x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3)$ .

#### Exercice 49 : [énoncé]

- (a)  $\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$   
 (b)  $\ln(2 + \sin x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)$   
 (c)  $\sqrt{3 + \cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$

#### Exercice 50 : [énoncé]

- (a)  $e^{\sqrt{1+x}} = e + \frac{e}{2}x + \frac{e}{48}x^3 + o(x^3)$ .

- (b)  $\ln(1 + \sqrt{1+x}) = \ln 2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 + o(x^3)$   
 (c)  $\ln(3e^x + e^{-x}) = 2 \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

#### Exercice 51 : [énoncé]

- (a)  $(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$   
 (b)  $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$   
 (c)  $\ln\left(\frac{\operatorname{sh} x}{x}\right) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4)$

#### Exercice 52 : [énoncé]

- (a)  $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$   
 (b)  $\frac{\arctan x}{\tan x} = 1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$   
 (c)  $\frac{x-1}{\ln x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

#### Exercice 53 : [énoncé]

- (a)  $\frac{x-\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$   
 (b)  $\frac{\sin x}{\exp(x)-1} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$   
 (c)  $\frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{90}x^3 + o(x^3)$

#### Exercice 54 : [énoncé]

- (a)  $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = -x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$   
 (b)  $\sqrt{3 + \cos x} = 2 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^3)$   
 (c)  $(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$   
 (d)  $\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$

#### Exercice 55 : [énoncé]

On primitive de  $DL_2(1)$  de  $\frac{1}{1+x^2}$  :

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

**Exercice 56 : [énoncé]**

- (a)  $\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = 1 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{8}t^8 + o(t^9)$  dont  $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = t - \frac{1}{10}t^5 + \frac{1}{24}t^9 + o(t^{10})$   
 puis  
 $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + o(x^{10})$
- (b)  $\ln\left(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right) = \ln(e^x - \frac{x^{1000}}{1000!} + o(x^{1000})) =$   
 $\ln(e^x) + \ln(1 - \frac{x^{1000}e^{-x}}{1000!} + o(x^{1000})) = x - \frac{1}{1000!}x^{1000} + o(x^{1000}).$

**Exercice 57 : [énoncé]**

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \binom{-1}{k} 2k(-x)^k + o(x^n)$$

avec

$$\begin{aligned} \binom{-1}{k} 2k &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{2k-1}{2})}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2^k k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}. \end{aligned}$$

Au final,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} x^k + o(x^n).$$

**Exercice 58 : [énoncé]**

On a

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2k-1}{2}}{k!} = \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

puis

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (2k+1) (k!)^2} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

**Exercice 59 : [énoncé]**

On a

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k x^{2k} + o(x^{2n})$$

avec

$$c_k = \frac{(-1)^k \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2k-1}{2}}{k!} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}$$

donc

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

**Exercice 60 : [énoncé]**

$$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1-x^2} \text{ et } \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

**Exercice 61 : [énoncé]** $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2} > 0$$

de plus  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ ,  $\lim_{-\infty} f = -\infty$ .Donc  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  et  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .En particulier  $f^{-1}$  admet une  $DL_5(0)$ , de plus comme  $f$  est impaire,  $f^{-1}$  l'est aussi et le  $DL_5(0)$  de  $f^{-1}$  est de la forme :

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

En réalisant un  $DL_5(0)$  de  $f^{-1}(f(x))$  on obtient :

$$f^{-1}(f(x)) = ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{1}{2}a + 3b + c\right)x^5 + o(x^5).$$

Or  $f^{-1}(f(x)) = x$ , donc :

$$a = 1, b = -1 \text{ et } c = \frac{5}{2}.$$

**Exercice 62 : [énoncé]**

- (a)  $f$  est évidemment dérivable en tout  $a \in \mathbb{R}^*$  et aussi dérivable en 0 avec  $f'(0) = 0$ .
- (b)  $f$  admet pour développement limité à l'ordre  $n - 1$  :  $f(x) = o(x^{n-1})$ .  
Si  $f$  admet un  $DL_n(0)$  celui-ci serait de la forme

$$f(x) = ax^n + o(x^n)$$

ce qui entraîne que  $\sin(1/x)$  admet une limite finie en 0 ce qui est notoirement faux.

**Exercice 63 : [énoncé]**

On a

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2).$$

Par suite  $f$  peut être prolongée par continuité en 0 en posant  $f(0) = -\frac{1}{2}$ .

De plus ce prolongement est dérivable en 0 et  $f'(0) = \frac{1}{3}$ .

L'équation de la tangente en 0 est  $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x$  et la courbe est localement en dessous de celle-ci.

**Exercice 64 : [énoncé]**

On a

$$f(x) = ax - a(1 + \frac{1}{2}a)x^2 + a(1 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a^2)x^3 + o(x^3).$$

Pour que  $f$  présente un point d'inflexion en 0, il faut que  $a(1 + \frac{1}{2}a) = 0$  i.e. :  $a = -2$ .

Inversement si  $a = -2$ ,

$$f(x) = -2x - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

et par suite  $f$  présente un point d'inflexion en 0.

**Exercice 65 : [énoncé]**

$f$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  et se prolonge par continuité en 0 en posant  $f(0) = 1$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

donc  $f$  est dérivable en 0 avec  $f'(0) = -1/2$  et finalement  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 66 : [énoncé]**

$f$  est évidemment de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

Montrons par récurrence que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et que  $f^{(n)}$  est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x^2}$$

pour  $x \neq 0$  avec  $P_n \in \mathbb{R}[X]$ .

Pour  $n = 0$  : ok.

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 0$ .

$f^{(n)}$  est continue, dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour  $x \neq 0$ ,

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3}P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

avec  $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$ .

Récurrence établie.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(x) = \lim_{y=1/x^2} P_n(\sqrt{y})e^{-y} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow 0^+$  et de même quand  $x \rightarrow 0^-$ .

Par le théorème du prolongement  $\mathcal{C}^1$  dans une version généralisée, on obtient que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $f^{(n)}(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par suite  $f^{(n)}$  est dérivable en 0 et  $f^{(n+1)}(0) = 0$ .

**Exercice 67 : [énoncé]**

- (a) Soit  $G$  une primitive de la fonction  $t \mapsto 1/\ln t$  sur  $]0; 1[$  (resp. sur  $]1; +\infty[$ ).

Pour tout  $x \in ]0; 1[$  (resp.  $]1; +\infty[$ ), on a  $f(x) = G(x^2) - G(x)$ . On en déduit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0; 1[$  (resp. sur  $]1; +\infty[$ ) et

$$f'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

On a alors

$$f''(x) = \frac{x \ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}.$$

Soit  $g(x) = x \ln x - x + 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $g'(x) = \ln(x)$ . Puisque  $g(1) = 0$ , la fonction  $g$  est positive puis  $f'' \geq 0$  sur  $]0; 1[$  (resp.  $]1; +\infty[$ ).

- (b) Pour  $x > 1$ ,

$$\forall t \in [x; x^2], \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}.$$

D'où

$$\int_x^{x^2} \frac{x dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t \ln t}.$$

Comme  $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$ , on obtient

$$x \ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2$$

puis  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \ln 2$ .

Pour  $x < 1$ ,

$$\forall t \in [x^2; x], \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}.$$

D'où

$$\int_x^{x^2} \frac{x^2 dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x dt}{t \ln t}.$$

On obtient  $x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$  puis  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln 2$ .

(c)  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$  et

$$f'(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Par le théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ , on a  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f'(1) = 1$ .

De même, en exploitant

$$f''(1+h) = \frac{(1+h)\ln(1+h) - h}{(1+h)(\ln(1+h))^2} \sim \frac{h^2/2}{(1+h)h^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

on obtient que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $f''(1) = 1/2$ .

Comme  $f''$  est positive sur  $]0; +\infty[$ , on peut conclure que  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 68 : [énoncé]**

(a)  $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^{5/2} + o(x^{5/2})$

(b)  $x^x = 1 + x \ln x + \frac{1}{2}x^2 \ln^2 x + o(x^2 \ln^2 x)$

**Exercice 69 : [énoncé]**

(a)  $\sqrt{x+1} = \sqrt{x} \sqrt{1+1/x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$

(b)  $x \ln(x+1) - (x+1) \ln x = -\ln x + 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(c)  $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = e - \frac{e}{2} \frac{1}{x} + \frac{11e}{24} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

**Exercice 70 : [énoncé]**

(a) La fonction  $\varphi$  est dérivable sur  $] -1; +\infty[$  avec

$$\varphi'(s) = 1 - \frac{1}{1+s} = \frac{s}{1+s} \quad \text{pour tout } s > -1$$

On en déduit les variations de  $\varphi$  :

[Une figure]

La fonction  $\varphi$  est continue sur  $[0; +\infty[$  et strictement croissante sur cet intervalle car sa dérivée y est positive et ne s'annule qu'en 0. La restriction de  $\varphi$  au départ de  $[0; +\infty[$  définit une bijection dont le domaine de valeurs est déterminé par les limites de  $\varphi$  en 0 et  $+\infty$ , c'est la bijection  $\varphi_+$  de  $[0; +\infty[$  vers  $[0; +\infty[$ . De même,  $\varphi$  est continue sur  $] -1; 0]$  et strictement décroissante, elle définit une bijection  $\varphi_-$  de  $] -1; 0]$  vers  $[0; +\infty[$ .

(b) Par développement limité,

$$\varphi(s) \underset{s \rightarrow 0}{=} s - \left(s - \frac{1}{2}s^2 + o(s^2)\right) = \frac{1}{2}s^2 + o(s^2) \underset{s \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}s^2$$

Les bijections réciproques  $\varphi_+^{-1}$  et  $\varphi_-^{-1}$  sont continues et leurs limites ainsi que leurs variations se déduisent des tableaux de variation de  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$  :

[Une figure]

En particulier,  $\varphi_+^{-1}$  et  $\varphi_-^{-1}$  sont de limites nulles en 0. Par composition, on peut donc écrire à la fois

$$\varphi(\varphi_+^{-1}(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}(\varphi_+^{-1}(t))^2 \quad \text{et} \quad \varphi(\varphi_+^{-1}(t)) = t \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

On en déduit

$$\varphi_+^{-1}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2t} \quad \text{car} \quad \varphi_+^{-1}(t) \geq 0$$

On montre de même

$$\varphi_-^{-1}(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\sqrt{2t} \quad \text{car} \quad \varphi_-^{-1}(t) \leq 0$$

(c) Un équivalent produit le premier terme d'un développement asymptotique, le terme suivant se déduit d'un équivalent de la différence.

Posons  $\alpha(t) = \varphi_+^{-1}(t) - \sqrt{2t}$  de sorte que

$$\varphi_+^{-1}(t) = \sqrt{2t} + \alpha(t) \quad \text{avec} \quad \alpha(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o(\sqrt{t})$$

Déterminons un équivalent de  $\alpha(t)$  en injectant l'écriture précédente dans l'égalité  $\varphi(\varphi_+^{-1}(t)) = t$ , c'est-à-dire

$$\varphi_+^{-1}(t) - \ln(1 + \varphi_+^{-1}(t)) = t \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad (1)$$

Par développement du logarithme à trois termes,

$$\ln(1 + u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$$

avec

$$\begin{cases} u = \sqrt{2t} + \alpha(t) \\ u^2 = 2t + 2\sqrt{2t}\alpha(t) + o(\sqrt{t}\alpha(t)) \\ u^3 = 2\sqrt{2}t^{3/2} + o(t^{3/2}) \end{cases}$$

on obtient

$$\ln(1 + \sqrt{2t} + \alpha(t)) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \sqrt{2t} + \alpha(t) - \frac{1}{2}(2t + 2\sqrt{2t}\alpha(t)) + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2} + o(t^{3/2})$$

Après simplifications, l'égalité (??) donne alors

$$\sqrt{2t}\alpha(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2} + o(t^{3/2})$$

On en déduit

$$\alpha(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{3}t$$

On obtient ainsi le développement asymptotique à deux termes

$$\varphi_+^{-1}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \sqrt{2t} + \frac{2}{3}t + o(t)$$

On calcule un troisième terme en déterminant un équivalent de  $\beta(t) = \alpha(t) - 2t/3 = o(t)$ . On développe pour cela le logarithme à quatre termes en écrivant

$$\begin{cases} u = \sqrt{2t} + \frac{2}{3}t + \beta(t) \\ u^2 = 2t + \frac{4\sqrt{2}}{3}t^{3/2} + \frac{4}{9}t^2 + 2\sqrt{2t}\beta(t) + o(\sqrt{t}\beta(t)) \\ u^3 = 2\sqrt{2}t^{3/2} + 4t^2 + o(t^2) \\ u^4 = 4t^2 + o(t^2) \end{cases}$$

Au terme des calculs, on obtient

$$\beta(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{9\sqrt{2}}t^{3/2} \quad \text{puis} \quad \varphi_+^{-1}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \sqrt{2t} + \frac{2}{3}t + \frac{1}{9\sqrt{2}}t^{3/2} + o(t^{3/2})$$

Par des calculs analogues, on acquiert

$$\varphi_-^{-1}(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} -\sqrt{2t} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{9\sqrt{2}}t^{3/2} + o(t^{3/2})$$

[Une figure]