Exercice 1 [00844] [Correction]
Montrer que la suite réelle (x_n) définie par $x_0 \in [a\,;b]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(f(x_n) + x_n\big)$$

où f est 1-lipschitzienne de $[a\,;b]$ dans $[a\,;b]$, converge vers un point fixe de f.

Exercice 2 [01767] [Correction]
f étant continue sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 [03788] [Correction]

(a) Montrer que la fonction

$$f\colon x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Déterminer la limite de f en 0.

Exercice 4 [03193] [Correction]
Pour a et b des réels tels que $ab > 0$, on considère

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Calculer $I(-b,-a)$, $I(1/a,1/b)$ et $I(1/a,a)$ en fonction $I(a,b)$.

(b) Pour $a,b > 1$, calculer $I(a,b)$ via changement de variables $v = x + 1/x$ puis $v = 1/t$.

(c) Montrer que la relation ainsi obtenue est valable pour tout a,b tels que $ab > 0$.

Exercice 5 [03197] [Correction]
Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2-x).$$

Exercice 6 [02459] [Correction]
Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 7 [02599] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et l'équation

$$(E_n)\colon x^n + x - 1 = 0.$$

(a) Montrer qu'il existe une unique solution positive de (E_n) notée x_n et que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$.

(b) On pose $y_n = 1 - x_n$. Montrer que, pour n assez grand,

$$\frac{\ln n}{2n} \le y_n \le 2\frac{\ln n}{n}$$

(on posera $f_n(y) = n\ln(1-y) - \ln(y)$).

(c) Montrer que $\ln(y_n) \sim -\ln n$ puis que

$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 8 [02519] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \ne 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) f admet-elle un développement limité en 0 ? si oui à quel ordre maximal ?

Exercice 9 [03581] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé de degré ≥ 2 ; on veut montrer que le polynôme P' est lui aussi scindé.

(a) Énoncer le théorème de Rolle.

(b) Si x_0 est racine de P de multiplicité $m \ge 1$, déterminer sa multiplicité dans P' ?

(c) Prouver le résultat énoncé.

Exercice 10 [02175] [Correction]
Soient $a \in]0\,;\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1.$$

Exercice 11 [02553] [Correction]
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X - 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Calculer le coefficient de X^2 dans P_n.

Exercice 12 [02580] [Correction]
On cherche les polynômes

$$P(X) = (X - a)(X - b) \in \mathbb{C}[X]$$

tels que $P(X)$ divise $P(X^3)$.
Montrer que, si $a = b$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et que si $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, il existe 6 polynômes dont 4 dans $\mathbb{R}[X]$.
Trouver les polynômes P si $a \neq b$ et $a^3 = b^3$ et en déduire que 13 polynômes en tout conviennent, dont 7 dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 13 [02504] [Correction]
Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.

(a) Montrer
$$\left|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)\right| \leq \mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

(b) Trouver u et v dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que
$$\mathrm{rg}(u + v) < \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

(c) Trouver deux endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ tels que
$$\mathrm{rg}(u + v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

Exercice 14 [00074] [Correction]
Pour $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on note S_p l'ensemble des suites (u_n) vérifiant

$$\exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n).$$

(a) Montrer que si $u \in S_p$, P est unique ; on le notera P_u.

(b) Montrer que S_p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(c) Montrer que ϕ, qui à u associe P_u, est linéaire et donner une base de son noyau.
Que représente son image ?

(d) Donner une base de S_p (on pourra utiliser $R_k(X) = (X + 1)^k - aX^k$ pour $k \in [\![0\,;p]\!]$).

(e) *Application:* Déterminer la suite (u_n) définie par
$$u_0 = -2 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7.$$

Exercice 15 [03360] [Correction]
Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.

(b) Montrer
$$E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im} g.$$

(c) Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?

(d) Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

Exercice 16 [03359] [Correction]
Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$.

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.

(b) Montrer
$$E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im} g.$$

(c) Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?

(d) Caractériser $g \circ f$

Exercice 17 [02495] [Correction]
Soit E un plan vectoriel.

(a) Montrer que f endomorphisme non nul est nilpotent si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

(b) En déduire qu'un tel endomorphisme ne peut s'écrire sous la forme $f = u \circ v$ avec u et v nilpotents.

Exercice 18 [02585] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.

(a) En appliquant le théorème du rang à la restriction h de f à l'image de g, montrer que
$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leq \operatorname{rg}(f \circ g).$$

(b) Pour $n = 3$, trouver tous les endomorphismes de E tels que $f^2 = 0$.

Exercice 19 [04154] [Correction]
Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 vérifiant $f^3 + f = 0$.

(a) Soit $x \in E$. Démontrer que si $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$ alors $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$.

(b) Montrer que
$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}).$$

(c) Prouver $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) \geq 1$. Montrer que, si $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) \setminus \{0\}$ alors $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$.

(d) Que vaut $\det(-\operatorname{Id})$? En déduire $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) = 2$.

(e) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20 [04942] [Correction]
Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

(a) Montrer que f n'est pas surjectif.

(b) Montrer que f n'est pas diagonalisable et que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in E \setminus \operatorname{Ker} f$, la famille $\big(f(x), f^2(x)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et calculer la trace de f.

Exercice 21 [03702] [Correction]
Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 22 [03212] [Correction]
Soient $b = (i, j)$ et $B = (I, J)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et P la matrice de passage de b à B.
Pour $x \in E$, notons
$$v = \operatorname{Mat}_b x \text{ et } V = \operatorname{Mat}_B x.$$

(a) Retrouver la relation entre v et V.

(b) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et
$$m = \operatorname{Mat}_b f \text{ et } M = \operatorname{Mat}_B f.$$
Retrouver la relation entre m et M.

(c) Par quelle méthode peut-on calculer m^n lorsqu'on connaît deux vecteurs propres non colinéaires de f.

Exercice 23 [02560] [Correction]
Discuter suivant a et b et résoudre
$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1. \end{cases}$$

Exercice 24 [02579] [Correction]
Résoudre, en discutant selon $a, b \in \mathbb{R}$ le système
$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3. \end{cases}$$

Exercice 25 [03160] [Correction]
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$.

(a) Indiquer des endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E.

(b) Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $i\in\{2,\dots,n\}$, la famille $(e_1+e_i,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E.

(c) Déterminer tous les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est diagonale dans toutes les bases de E.

(d) Quels sont les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E ?

Exercice 26 [02596] [Correction]
Soit f un élément non nul de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$f^3+f=0.$$

Montrer que $\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f$ et que l'on peut trouver une base dans laquelle f a pour matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 27 [02575] [Correction]
Montrer que la matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Exercice 28 [02563] [Correction]
Pour A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation

$$X=\operatorname{tr}(X)A+B.$$

Exercice 29 [02547] [Correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n>1$.
Montrer que $f\in\mathcal{L}(E)$ de rang 1 n'est pas forcément un projecteur.
Montrer que $f\in\mathcal{L}(E)$ de rang 1 et de trace 1 est un projecteur.
Trouver une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs.

Exercice 30 [02533] [Correction]
Soient $u,v\colon\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ définies par

$$u(P)=P(X+1)\text{ et }v(P)=P(X-1).$$

(a) Calculer $\operatorname{rg}(u-v)$ en utilisant sa matrice.

(b) Retrouver ce résultat d'une autre manière.

Exercice 31 [02584] [Correction]
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$; calculer

$$D_n=\begin{vmatrix}a+b&b&&(0)\\a&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&b\\(0)&&a&a+b\end{vmatrix}_{[n]}.$$

Exercice 32 [03576] [Correction]

(a) Donner le rang de $B={}^t(\operatorname{Com}A)$ en fonction de celui de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

(b) On se place dans le cas où $\operatorname{rg}A=n-1$.
Soit $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AC=CA=O_n.$$

Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que

$$C=\lambda B.$$

Exercice 33 [01425] [Correction]
Soient $a\neq b$ et $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$. On pose

$$\Delta_n(x)=\begin{vmatrix}\lambda_1+x&a+x&\cdots&a+x\\b+x&\lambda_2+x&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a+x\\b+x&\cdots&b+x&\lambda_n+x\end{vmatrix}_{[n]}.$$

(a) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x.

(b) Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 34 [03377] [Correction]

(a) Calculer

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

(b) En déduire

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 35 [03366] [Correction]

Montrer

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

Exercice 36 [03577] [Correction]

Pour une famille de n réels distincts (x_k) de $[0\,;\pi]$, on pose

$$P_n = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\cos x_i - \cos x_j).$$

(a) Combien le produit définissant P_n comporte-t-il de facteurs ?

(b) Pour $(i,j)\in [\![1\,;4]\!]^2$ écrire la matrice $M\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de coefficient général

$$m_{i,j} = \cos\bigl((j-1)x_i\bigr).$$

(c) Montrer que $m_{i,j}$ est un polynôme en $\cos x_i$.

(d) Calculer $\det M$ en fonction de P_4 et montrer $|\det M| < 24$

Exercice 37 [04153] [Correction]

Soit v un endomorphisme d'un espace euclidien de de dimension n.

(a) Montrer que la quantité

$$S = \sum_{i=1}^{n}\langle v(e_i), e_i\rangle$$

ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E choisie.

(b) Montrer que la quantité

$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle v(e_i), f_j\rangle^2$$

ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ de E choisies.

(c) Que vaut T lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r ?

Exercice 38 [02571] [Correction]

(a) Montrer que $(f\,|\,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur l'ensemble E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ engendré par $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \mathrm{e}^x$ et $f_3(x) = x$.

(b) Pour quels réel a et b la distance de $f_2(x)$ à $g(x) = ax+b$ est-elle minimale ?

Exercice 39 [03117] [Correction]

(a) Montrer que $(A\,|\,B) = \operatorname{tr}\bigl(A^tB\bigr)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la distance de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 40 [00073] [Correction]
On munit $E = \mathcal{C}([-1\,;1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(f\,|\,g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on note $P_i(x) = x^i$.

(a) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.

(b) Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $F = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2).

(c) Calculer la projection orthogonale de P_3 sur F et la distance de P_3 à F.

Exercice 41 [03803] [Correction]
Montrer que la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.
Calculer $\det(M)$. Qu'en déduire d'un point de vue géométrique ?
Donner les caractéristiques géométriques de M.

Exercice 42 [03805] [Correction]

(a) Énoncer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

(b) Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 43 [04156] [Correction]
On considère une matrice 3×3 composée de 9 jetons numérotés de 1 à 9.
On cherche à déterminer la probabilité p pour que le déterminant de la matrice soit un entier impair.

(a) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que la classe de congruence du déterminant de A modulo 2 est égale à la classe du déterminant de la matrice dont les coefficients sont les restes $r_{i,j}$ de la division euclidienne de $a_{i,j}$ par 2.

(b) On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 composées des 9 jetons. Déterminer $\mathrm{Card}\,\mathcal{M}$.

On définit $\Omega = \{M \in \mathcal{M} \mid \det M \text{ impair}\}$ et Δ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 dont cinq coefficients sont égaux à 1, quatre sont nuls et de déterminant impair.

(c) Donner une relation entre $\mathrm{Card}\,\Omega$ et $\mathrm{Card}\,\Delta$.

(d) On considère une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1.
Donner le nombre K_1 de ces matrices.
On considère une matrice de Δ dont deux colonnes possèdent exactement un coefficient nul.
Déterminer le nombre K_2 de ces matrices.

(e) Calculer $\mathrm{Card}\,\Delta$ et en déduire $\mathrm{Card}\,\Omega$.

(f) Déterminer la probabilité p.

Exercice 44 [04946] [Correction]
On donne la décomposition en facteurs irréductibles d'un entier $n \geq 2$

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$$

et note P la probabilité uniforme sur $\Omega = [\![1\,;n]\!]$.

(a) Que définit la fonction d'Euler $\varphi(n)$? Rappeler sa valeur.

(b) Soit d un diviseur de n et $D(d)$ l'ensemble de ses multiples dans Ω. Calculer $\mathrm{P}\big(D(d)\big)$.

(c) On note A l'ensemble des entiers de Ω premiers avec n ; montrer

$$A = \bigcap_{k=1}^{r} \overline{D(p_k)}.$$

(d) Retrouver la valeur de $\varphi(n)$.

Exercice 45 [03716] [Correction]
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

(a) On suppose que la série $\sum a_n$ converge, donner la nature de $\sum a_n/S_n$.

(b) On suppose que la série $\sum a_n$ diverge, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

En déduire la nature de $\sum a_n/S_n^2$.

(c) On suppose toujours la divergence de la série $\sum a_n$.
Quelle est la nature de $\sum a_n/S_n$?

Exercice 46 [02516] [Correction]
Soient
$$u_n = \frac{1}{3^n n!}\prod_{k=1}^{n}(3k-2) \text{ et } v_n = \frac{1}{n^{3/4}}.$$

(a) Montrer que pour n assez grand,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(b) En déduire que $\sum u_n$ diverge. (on pourra utiliser $\frac{u_n}{v_n}$)

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
La fonction itératrice de cette suite récurrente est

$$g\colon x\mapsto \frac{1}{2}\big(f(x)+x\big).$$

On vérifie aisément que cette fonction est définie sur $[a\,;b]$ et à valeurs dans $[a\,;b]$.
On en déduit que la suite (x_n) est bien définie et que c'est une suite d'éléments de $[a\,;b]$.
On a

$$x_{n+1}-x_n=\frac{\big(f(x_n)-f(x_{n-1})\big)+\big(x_n-x_{n-1}\big)}{2}.$$

Puisque f est 1-lipschitzienne, on a

$$\big|f(x_n)-f(x_{n-1})\big|\leq |x_n-x_{n-1}|$$

et donc $x_{n+1}-x_n$ est du signe de x_n-x_{n-1}. Par conséquent, la suite (x_n) est monotone et sa monotonie découle du signe de x_1-x_0. La suite (x_n) étant de plus bornée, elle converge vers une certaine limite ℓ avec $\ell\in[a\,;b]$.
La relation

$$x_{n+1}=\frac{x_n+f(x_n)}{2}$$

donne à la limite sachant f continue

$$\ell=\frac{\ell+f(\ell)}{2}$$

donc $f(\ell)=\ell$.

Exercice 2 : [énoncé]
Montrons que l'égalité proposée a lieu si, et seulement si, la fonction f est de signe constant
Si f est positive alors $|f|=f$ et donc l'égalité a lieu.
Si f est négative alors $|f|=-f$ et à nouveau l'égalité a lieu.
Inversement, supposons

$$\left|\int_a^b f\right|=\int_a^b|f|.$$

Si $\int_a^b f\geq 0$ alors on obtient

$$\int_a^b f=\int_a^b|f|$$

et donc

$$\int_a^b \big|f(x)\big|-f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

La fonction $|f|-f$ est continue, positive et d'intégrale nulle, c'est donc la fonction nulle. Par suite $f=|f|$ et donc f est positive.
Si $\int_a^b f\leq 0$, l'étude en analogue en observant

$$\int_a^b \big|f(x)\big|+f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Exercice 3 : [énoncé]

(a) La fonction $t\mapsto \mathrm{e}^t/t$ est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$, elle y admet donc une primitive F.
Pour $x>0$, on a $[x\,;2x]\subset\,]0\,;+\infty[$, donc l'intégrale définissant $f(x)$ existe et

$$f(x)=F(2x)-F(x).$$

Puisque la fonction F est dérivable, la fonction f l'est aussi et

$$f'(x)=2F'(2x)-F'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{x}.$$

L'étude pour $x<0$ est similaire en considérant $t\mapsto \mathrm{e}^t/t$ définie et continue sur $]-\infty\,;0[\,\supset[2x\,;x]$.

(b) Pour $x>0$,

$$\forall t\in[x\,;2x],\mathrm{e}^x\leq \mathrm{e}^t\leq \mathrm{e}^{2x}$$

donc

$$\mathrm{e}^x\ln 2\leq f(x)\leq \mathrm{e}^{2x}\ln 2$$

puis

$$f(x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}\ln 2.$$

L'étude est analogue en 0^-

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Par parité de la fonction intégrée, on a

$$I(-b,-a)=I(a,b).$$

Par le changement de variable $u = 1/t$, on obtient

$$I(1/a,1/b) = \int_a^b \frac{1-\frac{1}{t^2}}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}}\frac{-\,\mathrm{d}t}{t^2} = I(a,b).$$

En particulier

$$I(1/a,a) = I(a,1/a)$$

alors que par échange des bornes

$$I(1/a,a) = -I(a,1/a).$$

On en déduit

$$I(1/a,a) = 0.$$

(b) En procédant aux changements de variable proposés

$$I(a,b) = \int_{a+1/a}^{b+1/b} \frac{-\,\mathrm{d}v}{v\sqrt{v^2-2}} = \int_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-2t^2}}$$

et donc

$$I(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arcsin\sqrt{2}t\right]_{a/(a^2+1)}^{b/(b^2+1)}.$$

(c) Le changement de variable $v = x + 1/x$ n'est pas bijectif quand x parcourt $]0\,;+\infty[$ mais dans les calculs précédents, il était possible de l'exploiter sans exprimer x en fonction de v. L'hypothèse $a, b > 1$ n'a donc pas été utilisée dans l'étude qui précède et donc le résultat proposé se généralise immédiatement.

Exercice 5 : [énoncé]
Soit f une fonction solution (s'il en existe).
La dérivée de f apparaît dérivable et donc f est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -f'(2-x) = -f(x).$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant de solution générale

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x.$$

En injectant dans l'équation étudiée, une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\lambda = \lambda\sin 2 - \mu\cos 2 \\ \mu = \lambda\cos 2 + \mu\sin 2 \end{cases}$$

ce qui après résolution équivaut à l'équation

$$(1+\sin 2)\lambda = (\cos 2)\mu.$$

En écrivant $\lambda = (\cos 2)\alpha$, on a $\mu = (1+\sin 2)\alpha$ et la solution générale de l'équation étudiée est de la forme

$$f(x) = \alpha\big(\sin x + \cos(2-x)\big) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6 : [énoncé]
On peut calculer l'intégrale

$$u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2.$$

Or pour $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

donc

$$u_n = \arctan\frac{1}{n^2} - \arctan\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 7 : [énoncé]

(a) On introduit $\varphi_n(x) = x^n + x - 1$. $\varphi_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$, φ_n est continue strictement croissante et réalise une bijective et de $[0\,;+\infty[$ vers $[-1\,;+\infty[$ d'où l'existence et l'unicité de x_n. On a $\varphi_n(1) = 1$ donc $x_n \in]0\,;1[$. Si $x_{n+1} < x_n$ alors $x_{n+1}^{n+1} < x_n^n$ puis

$$x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 < x_n^n + x_n - 1$$

ce qui est absurde. On en déduit que (x_n) est croissante et étant majorée cette suite converge. Posons ℓ sa limite, $\ell \in]0\,;1]$. Si $\ell < 1$ alors $x_n^n + x_n - 1 = 0$ donne à la limite $\ell - 1 = 0$ ce qui est absurde. Il reste $\ell = 1$.

(b) f_n est strictement décroissante sur $]0\,;1[$, $f_n(y_n) = 0$,

$$f_n\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \sim \frac{\ln n}{2} > 0 \text{ et } f_n\left(\frac{2\ln n}{n}\right) \sim -\ln n < 0$$

donc à partir d'un certain rang

$$\frac{\ln n}{2n} \le y_n \le 2\frac{\ln n}{n}.$$

(c)
$$\ln\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \le \ln y_n \le \ln\left(2\frac{\ln n}{n}\right)$$
donne $\ln(y_n) \sim -\ln n$ puis $n\ln(1-y_n) = \ln y_n$ donne $-ny_n \sim -\ln n$ puis $y_n \sim \frac{\ln n}{n}$ et finalement
$$x_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) f est évidemment dérivable en tout $a \in \mathbb{R}^*$ et aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

(b) f admet pour développement limité à l'ordre $n-1$: $f(x) = o(x^{n-1})$.
Si f admet un $DL_n(0)$ celui-ci serait de la forme
$$f(x) = ax^n + o(x^n)$$
ce qui entraîne que $\sin(1/x)$ admet une limite finie en 0 ce qui est notoirement faux.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Si $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$) est continue, dérivable sur $]a\,;b[$ et si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) Si x_0 est racine de multiplicité m de P alors x_0 est racine de multiplicité $m-1$ de P' (en convenant qu'une racine de multiplicité 0 n'est en fait pas racine).

(c) Notons $x_1 < \ldots < x_p$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. Puisque le polynôme P est supposé scindé, on a
$$m_1 + \cdots + m_p = \deg P.$$
Les éléments $x_1, \ldots, x_p$ sont racines de multiplicités $m_1 - 1, \ldots, m_p - 1$ de P'.
En appliquant le théorème de Rolle à P entre x_k et x_{k+1}, on détermine $y_k \in\,]x_k\,; x_{k+1}[$ racine de P'. Ces y_k sont distincts entre eux et distincts des $x_1, \ldots, x_p$. On a ainsi obtenu au moins
$$(p-1) + (m_1 - 1) + \cdots + (m_p - 1) = \deg P - 1$$
racines de P'. Or $\deg P' = \deg P - 1$ donc P' est scindé.

Exercice 10 : [énoncé]
Les racines de $X^2 - 2\cos(na)X + 1$ sont e^{ina} et e^{-ina} donc
$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1 = (X^n - \mathrm{e}^{ina})(X^n - \mathrm{e}^{-ina}).$$
Les racines de $X^n - \mathrm{e}^{ina}$ sont les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a + 2\mathrm{i}k\pi/n}$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et celles de $X^n - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$ s'en déduisent par conjugaison.
Ainsi
$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a + 2\mathrm{i}k\pi/n})\prod_{k=0}^{n-1}(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a - \mathrm{i}2k\pi/n})$$
dans $\mathbb{C}[X]$ puis
$$X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}a + 2\mathrm{i}k\pi/n})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a - 2\mathrm{i}k\pi/n}) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right.\right.$$
dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11 : [énoncé]
Notons a_n, b_n et c_n les coefficients de $1, X$ et X^2 dans P_n.
Puisque $P_1 = X - 2$, on a $a_1 = -2$, $b_1 = 1$ et $c_1 = 0$.
Puisque $P_{n+1} = P_n^2 - 2$, on a $a_{n+1} = a_n^2 - 2$, $b_{n+1} = 2a_nb_n$ et $c_{n+1} = b_n^2 + 2a_nc_n$.
On en déduit $a_2 = 2$, $b_2 = -4$ et $c_2 = 1$ puis pour $n \ge 3$: $a_n = 2$, $b_n = -4^{n-1}$,
$$c_n = 4^{n-2} + 4^{n-1} + \cdots + 4^{2n-4} = 4^{n-2}\frac{4^{n-1}-1}{3}.$$

Exercice 12 : [énoncé]
Si $a = b$ alors $(X-a)^2$ divise $(X^3 - a)^2$ si, et seulement si, a est racine au moins double de $(X^3 - a)^2$. Ceci équivaut à $a^3 = a$ ce qui donne $a \in \{-1, 0, 1\}$.
Les polynômes solutions correspondant sont alors $X^2, (X-1)^2$ et $(X+1)^2$, tous réels.
Si $a \ne b$ alors $(X-a)(X-b)$ divise $(X^3 - a)(X^3 - b)$ si, et seulement si, a et et b sont racines de $(X^3 - a)(X^3 - b)$.
Si $a^3 \ne b^3$ alors a et b sont racines $(X^3 - a)(X^3 - b)$ si, et seulement si,
$$\begin{cases} a^3 = a \\ b^3 = b \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases}.$$
Dans le premier cas, sachant $a \ne b$, on parvient aux polynômes $X(X-1), X(X+1)$ et $(X-1)(X+1)$.

Puisque
$$\begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases} \iff \begin{cases} b = a^3 \\ a^9 = a \end{cases},$$
dans le second cas, on parvient à $(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})(X - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4})$, $X^2 + 1$ et $(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4})(X - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4})$.
Ainsi quand $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, on parvient à 6 polynômes dont 4 réels.
Enfin, si $a \neq b$ et $a^3 = b^3$ alors $(X - a)(X - b)$ divise $(X^3 - a)(X^3 - b)$ si, et seulement si, $a^3 = a$ ou $a^3 = b$. Quitte à échanger a et b, on peut supposer $a^3 = a$ et on parvient alors aux polynômes $(X - 1)(X - j)$, $(X - 1)(X - j^2)$, $(X + 1)(X + j)$ et $(X + 1)(X + j^2)$ selon que $a = 1$ ou $a = -1$ (le cas $a = 0$ étant à exclure car entraînant $b = a$).
Au final on obtient $3 + 6 + 4 = 13$ polynômes solutions dont $3 + 4 + 0 = 7$ réels.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Pour tout $x \in E$, on a
$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$$
donc
$$\operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v.$$
Puisque
$$\dim(F + G) \leq \dim F + \dim G$$
on obtient
$$\operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v.$$
De plus, on peut écrire
$$u = (u + v) + (-v)$$
donc
$$\operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(u + v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u + v) + \operatorname{rg} v$$
puis
$$\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leq \operatorname{rg}(u + v).$$
Aussi
$$\operatorname{rg} v - \operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(u + v)$$
et donc
$$\left|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)\right| \leq \operatorname{rg}(u + v).$$

(b) Les endomorphismes $u = v = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ conviennent.

(c) Les endomorphismes $u = v = 0$ conviennent..

Exercice 14 : [énoncé]

(a) Si $u \in S_p$ et si deux polynômes P, Q conviennent pour exprimer u_{n+1} en fonction de u_n alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = Q(n).$$
Puisque le polynôme $P - Q$ possède une infinité de racines, c'est le polynôme nul et donc $P = Q$.

(b) $S_p \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $0 \in S_p$ (avec $P = 0$).
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in S_p$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient aisément
$$(\lambda u + \mu v)_{n+1} = a(\lambda u + \mu v)_n + (\lambda P_u + \mu P_v)(n)$$
et donc $\lambda u + \mu v \in S_p$ avec $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v \in \mathbb{R}_p[X]$.
S_p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(c) Ci-dessus, on a obtenu $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$ ce qui correspond à la linéarité de l'application ϕ.
$u \in \operatorname{Ker} \phi$ si, et seulement si, $P_u = 0$ ce qui signifie que u est une suite géométrique de raison a.
On en déduit que la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle qu'est le noyau de ϕ.
L'image de ϕ est $\mathbb{R}_p[X]$ car l'application ϕ est surjective puisque pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut définir une suite élément de S_p par la relation
$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n).$$

(d) La famille $(R_0, R_1, \dots, R_p)$ est une famille de polynômes de degrés étagés de $\mathbb{R}_p[X]$, elle forme donc une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Pour $k \in [\![0\,;p]\!]$, il est facile de déterminer une suite $u = (u_n) \in S_p$ vérifiant $S_u = R_k$ car
$$u_{n+1} = au_n + R_k(n) \iff u_{n+1} - (n+1)^k = a(u_n - n^k).$$
Ainsi la suite
$$u \colon n \mapsto n^k$$
convient.
Considérons alors la famille formée des suites
$$v \colon n \mapsto a^n \text{ et } v_k \colon n \mapsto n^k \text{ avec } k \in [\![0\,;p]\!].$$
Supposons
$$\lambda v + \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_p v_p = 0.$$

En appliquant ϕ, on obtient

$$\lambda_0 R_0 + \cdots + \lambda_p R_p = 0$$

donc $\lambda_0 = \ldots = \lambda_p = 0$ puis la relation initiale donne $\lambda = 0$ car $v \neq 0$.
La famille $(v, v_0, \ldots, v_p)$ est donc libre.
De plus, en vertu de la formule du rang

$$\dim S_p = \dim \operatorname{Ker} \phi + \operatorname{rg} \phi = 1 + (p+1) = p+2$$

donc la famille $(v, v_0, \ldots, v_p)$ est une base de S_p.

(e) En reprenant les notations qui précèdent, on peut écrire

$$u = \lambda v + \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1.$$

On a

$$P_u = \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 = -2X + 7.$$

Puisque $R_0 = -1$ et $R_1 = 1 - X$, on obtient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_0 = -5$.
Par suite

$$u_n = \lambda 2^n + 2n - 5.$$

Puisque $u_0 = -2$, on obtient $\lambda = 7$.
Finalement

$$u_n = 3.2^n + 2n - 5.$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Evidemment $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
Pour $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, on a $f(x) = f(g(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} f$.
Pour $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et alors
$y = g(f(g(x)) = g(f(a)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

(b) Si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$ alors on peut écrire $x = g(a)$ et puisque $f(x) = 0$,
$a = f(g(a)) = 0$ donc $x = 0$.
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = (x - g(f(x)) + g(f(x))$ avec
$x - g(f(x)) \in \operatorname{Ker} f$ et $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$.

(c) Si f est inversible alors $f \circ g = \mathrm{Id}$ entraîne $g = f^{-1}$.
Cette condition suffisante est aussi évidemment nécessaire.

(d) $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$ et donc $g \circ f$ est un projecteur.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Evidemment $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
Pour $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, on a $f(x) = f(g(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} f$.
Pour $y \in \operatorname{Im} g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et alors
$y = g(f(g(x)) = g(f(a)) \in \operatorname{Im}(g \circ f)$.

(b) Si $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$ alors on peut écrire $x = g(a)$ et puisque $f(x) = 0$,
$a = f(g(a)) = 0$ donc $x = 0$.
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = (x - g(f(x))) + g(f(x))$ avec
$x - g(f(x)) \in \operatorname{Ker} f$ et $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$.

(c) Si f est inversible alors $f \circ g = \mathrm{Id}$ entraîne $g = f^{-1}$.
Cette condition suffisante est aussi évidemment nécessaire.

(d) $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$ et donc $g \circ f$ est un projecteur, plus précisément, c'est la projection sur $\operatorname{Im} g$ parallèlement à $\operatorname{Ker} g$.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ alors $f^2 = 0$ et donc f est nilpotent.
Si f est nilpotent alors $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ et donc $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ ou 2. Or $f \neq 0$ donc il reste $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.
$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ donc $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 1$ ou 2.
Si $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 1$ alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et classiquement (cf. noyaux itérés) $\operatorname{Ker} f^n = \operatorname{Ker} f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui contredit la nilpotence de f.
Il reste donc $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 2$ et donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ puis l'égalité par argument de dimension.

(b) Si $f = u \circ v$ avec u et v nilpotents et nécessairement non nuls alors
$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} f$. Or ces espaces sont de dimension 1 donc
$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} v$. Mais $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ donc $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} v$ puis
$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} v$ d'où $u \circ v = 0$. C'est absurde.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) $\operatorname{Ker} h \subset \operatorname{Ker} f$ donc $\dim \operatorname{Ker} h \leq \dim \operatorname{Ker} f$.
En appliquant la formule du rang à f et à h on obtient

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rg} f \text{ et } \dim \operatorname{Ker} h = \operatorname{rg} g - \operatorname{rg} h.$$

On en déduit

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - n \leq \operatorname{rg} h.$$

Or $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} h$ donc $\operatorname{rg}(f \circ g) = \operatorname{rg} h$ et on peut conclure.

(b) Un endomorphisme f vérifie $f^2 = 0$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ ce qui entraîne, en dimension 3, $\operatorname{rg} f = 1$.
Si l'endomorphisme f n'est pas nul, en choisissant $x \in E$ tel que $x \notin \operatorname{Ker} f$ et en complétant le vecteur $f(x) \in \operatorname{Ker} f$, en une base $\bigl(f(x), y\bigr)$ de $\operatorname{Ker} f$, on obtient que la matrice de f dans la base $(x, f(x), y)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inversement, un endomorphisme f représenté par une telle matrice vérifie $f^2 = 0$.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Par hypothèse $f(y) = 0$ et $f^2(z) = -z$. En composant l'identité $x = y + z$ avec f^2, on obtient

$$f^2(x) = 0 + f^2(z) = -z$$

et il en découle

$$y = x - z = x + f^2(x).$$

(b) Ce qui précède assure l'unicité de la décomposition d'un vecteur x de E et donc le caractère direct de la somme.
De plus, pour $x \in E$, en posant $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$, on vérifie $x = y + z$ et

$$f(y) = f(x) + f^3(x) = (f^3 + f)(x) = 0$$
$$(f^2 + \operatorname{Id})(z) = -f^4(x) - f^2(x) = -(f^3 + f)\bigl(f(x)\bigr) = 0.$$

On peut donc affirmer que E est la somme directe de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$.

(c) On a $(f^2 + \operatorname{Id}) \circ f = 0$ donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$. Or $f \neq 0$ donc $\dim \operatorname{Im} f \geq 1$ puis $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) \geq 1$.
Soit x un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$. Supposons

$$\lambda x + \mu f(x) = 0. \tag{1}$$

En composant avec f on obtient $\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0$ puis

$$\lambda f(x) - \mu x = 0. \tag{2}$$

La combinaison $\lambda \times (\textbf{??}) - \mu \times (\textbf{??})$ donne $(\lambda^2 + \mu^2)x = 0$. Sachant $x \neq 0$, on obtient $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ puis $\lambda = \mu = 0$ car λ et μ sont réels. La famille $\bigl(x, f(x)\bigr)$ est donc libre.

(d) En dimension impaire $\det(-\operatorname{Id}) = -1$. Si l'endomorphisme f est inversible, la relation $f^3 + f = 0$ peut être simplifiée en $f^2 + \operatorname{Id} = 0$. Ceci donne $\det(f^2) = \det(-\operatorname{Id}) = -1$ ce qui est incompatible avec $\det(f^2) = (\det f)^2 \geq 0$. On en déduit que f n'est pas inversible : $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$.
La conjonction des résultats qui précèdent donne

$$\dim \operatorname{Ker} f = 1 \text{ et } \dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) = 2.$$

(e) Soit y un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$ et x un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$. La famille (y) est base de $\operatorname{Ker} f$ et la famille $\bigl(x, f(x)\bigr)$ est base de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$. Ces deux espaces étant supplémentaires dans E, la famille $\bigl(y, x, f(x)\bigr)$ est base de E. La matrice de f dans celle-ci est de la forme voulue.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) En dimension finie, il suffit d'établir $\det f = 0$ pour conclure. Or

$$\det f = \det\bigl(-f^3\bigr) = (-1)^3(\det f)^3.$$

Ainsi, $\det f$ est un réel solution de l'équation $x = -x^3$ et donc $\det f = 0$.

(b) 0 est la seule racine réelle du polynôme annulateur $X^3 + X$ et c'est donc la seule valeur propre de f (0 est valeur propre car f n'est pas injectif). Si f est diagonalisable, c'est l'endomorphisme nul ce que le sujet exclut.
Soit $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. On peut écrire $x = f(a)$ et on a alors

$$x = x + f^2(x) = f(a) + f^3(a) = 0.$$

Les espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont donc en somme directe et par conséquent supplémentaires car la formule du rang donne $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3$.

(c) Soit $x \in E \setminus \operatorname{Ker} f$. Les vecteurs $f(x)$ et $f^2(x)$ appartiennent à $\operatorname{Im} f$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0. \tag{3}$$

En appliquant f aux deux membres

$$\lambda f^2(x) - \mu f(x) = 0. \tag{4}$$

La combinaison $\lambda \times (\textbf{??}) - \mu \times (\textbf{??})$, donne

$$\bigl(\lambda^2 + \mu^2\bigr) f(x) = 0.$$

Puisque $f(x) \neq 0$, on obtient $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ et donc $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.

La famille $\left(f(x), f^2(x)\right)$ est donc libre et constitue une base de $\operatorname{Im} f$ qui est de dimension inférieure à 2 car f n'est pas surjectif.
Enfin, en complétant cette famille d'un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$, on forme une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut $\operatorname{tr} f = 0$.

Exercice 21 : [énoncé]
Par blocs, on a

$$A = \begin{pmatrix} M & O_2 \\ O_2 & -M \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

On vérifie que cette relation est encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$ en constatant que cette expression satisfait

$$A^n \times A^{-n} = I_4.$$

Exercice 22 : [énoncé]

(a) P est la matrice de l'application Id_E dans les bases B au départ et b à l'arrivée.
La relation $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donne matriciellement $v = PV$.

(b) La relation $f = \mathrm{Id}_E^{-1} \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donne matriciellement $M = P^{-1}mP$.

(c) Dans une base de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale et ses puissances sont alors faciles à calculer. Par changement de base, on en déduit m^n.

Exercice 23 : [énoncé]

$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2by + az = 1 \\ b(a-2)y + (2-a)z = b-1 \\ (a-2)x + (2-a)z = 0. \end{cases}$$

Si $a = 2$, on parvient au système

$$\begin{cases} 2x + 2by + 2z = 1 \\ 0 = b - 1. \end{cases}$$

Dans le cas $b \neq 1$, le système est incompatible.
Dans le cas $b = 1$, on parvient à l'équation $2x + 2y + 2z = 1$.
Si $a \neq 2$, on parvient au système

$$\begin{cases} 2x + 2by + az = 1 \\ by - z = \frac{b-1}{a-2} \\ x - z = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} (a+4)z = \frac{a-2b}{a-2} \\ by = z + \frac{b-1}{a-2} \\ x = z. \end{cases}$$

Dans le cas $a = -4$, le système n'est compatible que si $b = -2$ et on parvient au système

$$\begin{cases} x = z \\ -4y = 2z + 1. \end{cases}$$

Dans le cas $b = 0$, le système est incompatible.
Dans le cas général restant, on parvient à

$$x = z = \frac{a-2b}{(a-2)(a+4)}, y = \frac{ab+2b-4}{b(a-2)(a+4)}.$$

Exercice 24 : [énoncé]
Le déterminant de ce système carré est $(a-1)^3(a+3)$.
Cas $a = 1$:
Le système est compatible si, et seulement si, $b = 1$ et ses solutions sont les quadruplets (x, y, z, t) vérifiant

$$x + y + z + t = 1.$$

Cas $a = -3$:

En sommant les quatre équations, on obtient l'équation de compatibilité
$0 = 1 + b + b^2 + b^3$.
Si $b \notin \{i, -1, -i\}$ alors le système est incompatible.
Si $b \in \{i, -1, -i\}$ alors le système équivaut à

$$\begin{cases} x - 3y + z + t = b \\ x + y - 3z + t = b^2 \\ x + y + z - 3t = b^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z + t = b \\ \quad 4y - 4z = b^2 - b \\ \quad 4y - 4t = b^3 - b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^3 \\ z = y + \frac{1}{4}(b - b^2) \\ t = y + \frac{1}{4}(b - b^3) \end{cases}$$

ce qui permet d'exprimer la droite des solutions.
Cas $a \notin \{1, -3\}$:
C'est un système de Cramer...
Sa solution est

$$x = \frac{2 + a - b - b^2 - b^3}{2a - 3 + a^2}, y = \frac{ab - 1 + 2b - b^2 - b^3}{2a - 3 + a^2}, .$$

$$z = \frac{ab^2 - 1 - b + 2b^2 - b^3}{2a - 3 + a^2}, t = \frac{ab^3 - 1 - b - b^2 + 2b^3}{2a - 3 + a^2}.$$

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Les endomorphismes $\lambda \mathrm{Id}_E$ ont la propriété voulue.

(b) Les familles $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ engendrent le même espace vectoriel. Étant toutes deux formées de n vecteurs, si l'une est libre, l'autre aussi.

(c) Soit u un endomorphisme de E dont la matrice est diagonale dans toutes les bases de E.
La matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
Puisque la matrice de u dans la base $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ est aussi diagonale, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que
$$u(e_1 + e_i) = \alpha(e_1 + e_i).$$
Or par linéarité
$$u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i.$$
Par liberté de la famille (e_1, e_i) on identifie les scalaires et on peut affirmer
$$\lambda_1 = \alpha = \lambda_i.$$
Ainsi, si un endomorphisme à une représentation matricielle diagonale dans toutes les bases de E, sa matrice est de la forme λI_n et donc cet endomorphisme est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$.

(d) Soit u un tel endomorphisme. Si $A = (a_{i,j})$ est sa matrice dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ alors sa matrice dans la base $(e_1, 2e_2, \dots, ne_n)$ a pour coefficient général
$$\frac{j}{i} a_{i,j}$$
et comme cette matrice doit être égale à la précédente, on obtient
$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq i \implies a_{i,j} = 0.$$
Ainsi, cet endomorphisme a une matrice diagonale dans toute base de E et en vertu de ce qui précède, il est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 26 : [énoncé]
Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$. Il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = f(a)$ et alors
$$x = -f^3(a) = -f^2(x) = -f(f(x)) = -f(0) = 0.$$
Ainsi $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ puis, par le théorème du rang, on peut affirmer
$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f.$$
Si $f^2 + \mathrm{Id} = \tilde{0}$ alors $f^2 = -\mathrm{Id}$ puis $(\det f)^2 = \det(-\mathrm{Id}) = -1$. C'est impossible.
On en déduit que $f^2 + \mathrm{Id} \neq \tilde{0}$ et puisque $f \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = \tilde{0}$, on a $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$.
Soit $e_1 \in \mathrm{Ker}\, f$ non nul.
Puisque par hypothèse f n'est pas l'application nulle, considérons $e_2 = f(a) \in \mathrm{Im}\, f$ vecteur non nul. Posons $e_3 = -f(e_2) \in \mathrm{Im}\, f$.
On vérifie
$$f(e_3) = -f^2(e_2) = -f^3(a) = f(a) = e_2.$$
De plus les vecteurs e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires.
En effet si $e_3 = \lambda e_2$, on obtient en composant par f, $e_2 = -\lambda e_3$ et on en déduit $e_2 = -\lambda^2 e_2$. Sachant $e_2 \neq 0$, on obtient $\lambda^2 = -1$ ce qui est impossible avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Puisque (e_2, e_3) est une famille libre de $\mathrm{Im}\, f$ et puisque (e_1) est une famille libre de $\mathrm{Ker}\, f$, on peut affirmer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans celle-ci, la matrice de f est égale à A.

Exercice 27 : [énoncé]
On a $A^2 = 3I + 2A$ donc
$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I).$$

Exercice 28 : [énoncé]
Si X est solution alors
$$\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$
et donc
$$\operatorname{tr}(X)(1 - \operatorname{tr}(A)) = \operatorname{tr}(B).$$
Cas $\operatorname{tr} A \neq 1$.
On obtient
$$\operatorname{tr}(X) = \frac{\operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)}$$
puis
$$X = \frac{\operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)} A + B.$$
Inversement, cette matrice est bien solution.
Cas $\operatorname{tr} A = 1$.
Sous cas $\operatorname{tr} B \neq 0$.
L'équation $\operatorname{tr}(X)(1 - \operatorname{tr}(A)) = \operatorname{tr}(B)$ est incompatible, il n'y a pas de solution.
Sous cas $\operatorname{tr} B = 0$.
La solution X est de la forme $\lambda A + B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et inversement de telles matrices sont solutions.

Exercice 29 : [énoncé]
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $e_1, \dots, e_{n-1} \in \operatorname{Ker} f$.
La matrice de f dans cette base est de la forme
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$
avec $\lambda_n = \operatorname{tr} f$.
On observe alors que $A^2 = \lambda_n A$.
Ainsi si $\operatorname{tr} f = 1$ alors $A^2 = A$ donc $f^2 = f$ puis f est un projecteur.

Par l'isomorphisme de représentation matricielle dans une base donnée de E, on peut retraduire le problème matriciellement.
En considérant les éléments $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$ on forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que souhaitée.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) Dans la base canonique, la matrice de $u - v$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 2n \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$
donc
$$\operatorname{rg}(u - v) = (n + 1) - 1 = n.$$

(b) On peut aussi étudier le noyau de $u - v$ et par un argument de périodicité justifier que seuls les polynômes constants sont éléments de ce noyau.

Exercice 31 : [énoncé]
Par développement d'un déterminant tridiagonal,
$$D_n = (a + b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$
La suite (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - (a + b)r + ab = 0$ de racines a et b.
Si $a \neq b$ alors on peut écrire $D_n = \lambda a^n + \mu b^n$ et compte tenu des valeurs initiales, on obtient
$$D_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$
Si $a = b$ alors on peut écrire $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ et on parvient cette fois-ci à
$$D_n = (n + 1)a^n.$$

Exercice 32 : [énoncé]

(a) On sait $AB = BA = \det(A)\mathrm{I}_n$.
Si $\operatorname{rg} A = n$ alors A est inversible donc B aussi et $\operatorname{rg} B = n$.
Si $\operatorname{rg} A = n-1$ alors $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ et puisque $AB = \mathrm{O}_n$, $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$ puis $\operatorname{rg} B \leq 1$.
De plus, la matrice A étant de rang exactement $n-1$, elle possède un mineur non nul et donc $B \neq \mathrm{O}_n$. Finalement $\operatorname{rg} B = 1$.
Si $\operatorname{rg} A \leq n-2$ alors tous les mineurs de A sont nuls et donc $B = \mathrm{O}_n$ puis $\operatorname{rg} B = 0$.

(b) Puisque $\operatorname{rg} A = n-1$, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ et $\dim \operatorname{Ker} {}^tA = 1$.
Il existe donc deux colonnes X et Y non nulles telles que

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect} X \text{ et } \operatorname{Ker} {}^tA = \operatorname{Vect} Y.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AM = MA = \mathrm{O}_n$.
Puisque $AM = \mathrm{O}_n$, $\operatorname{Im} M \subset \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect} X$ et donc on peut écrire par blocs

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & | \dots | & \lambda_n X \end{pmatrix} = XL$$

avec $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.
La relation $MA = \mathrm{O}_n$ donne alors $XLA = \mathrm{O}_n$ et puisque $X \neq 0$, on obtient $LA = 0$ puis ${}^tA{}^tL = 0$. Ceci permet alors d'écrire L sous la forme $L = \lambda {}^tY$ puis M sous la forme

$$M = \lambda X {}^tY.$$

Inversement une telle matrice vérifie $AM = MA = \mathrm{O}_n$ et donc

$$\left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA = \mathrm{O}_n\right\} = \operatorname{Vect}(X {}^tY).$$

Cet espace de solution étant une droite et la matrice B étant un élément non nul de celle-ci, il est dès lors immédiat d'affirmer que toute matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AC = CA = \mathrm{O}_n$ est nécessairement colinéaire à B.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) En retirant la première colonne aux suivantes

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a - \lambda_1 & \cdots & a - \lambda_1 \\ b + x & \lambda_2 - b & & (a-b) \\ \vdots & & \ddots & \\ b + x & (0) & & \lambda_n - b \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Puis en développant selon la première colonne on obtient une expression de la forme.

$$\Delta_n(x) = \alpha x + \beta.$$

(b) Par déterminant triangulaire

$$\Delta_n(-a) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) \text{ et } \Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b).$$

On en déduit

$$\alpha = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - \prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a} \text{ et}$$
$$\beta = \frac{b\prod_{i=1}^n (\lambda_i - a) - a\prod_{i=1}^n (\lambda_i - b)}{b-a}.$$

Exercice 34 : [énoncé]

(a) En factorisant les colonnes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

En retranchant à chaque ligne a fois la précédente

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix}$$

et enfin en développant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

(b) En séparant la première colonne en deux

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}.$$

Puis en procédant à des combinaisons judicieuses sur les colonnes

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ b^2 & c^2 & a^2 \\ b^3 & c^3 & a^3 \end{vmatrix}.$$

Enfin, par permutation des colonnes dans le deuxième déterminant

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

Exercice 35 : [énoncé]

En sommant toutes les colonnes sur la première

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 1 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la fin)

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

On développe selon la première colonne et on se ramène à

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

avec $a = 1-n$ et $b = 1$. La poursuite du calcul donne alors

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{n-1}n^{n-2}$$

d'où la formule proposée.

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Il y autant de facteurs que de paires $\{i,j\}$ *i.e.*

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

(b)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos(2x_1) & \cos(3x_1) \\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2) & \cos(3x_2) \\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3) & \cos(3x_3) \\ 1 & \cos x_4 & \cos(2x_4) & \cos(3x_4) \end{pmatrix}.$$

(c) La propriété est immédiate pour $j=1$ ou $j=2$.
Pour $j=3$, $\cos(2x_i) = 2\cos^2 x_i - 1$.
Pour $j=4$, $\cos(3x_i) = 4\cos^3 x_i - 3\cos x_i$.

(d) $\det M$ est une expression polynomiale en $\cos(x_1)$ de degré au plus 3.
Puisque $\cos(x_2), \cos(x_3), \cos(x_4)$ sont 3 racines distinctes du polynôme correspondant, on peut écrire

$$\det M = \lambda(x_2,x_3,x_4)\prod_{j=2}^{4}(\cos x_1 - \cos x_j).$$

L'expression du coefficient $\lambda(x_2,x_3,x_4)$ est polynomiale $\cos(x_2)$ de degré au plus 2 (car il y a déjà le facteur $\cos(x_1)-\cos(x_2)$ dans le produit) et puisque $\cos(x_3),\cos(x_4)$ en sont des racines distinctes, on peut écrire

$$\lambda(x_2,\dots,x_n) = \mu(x_3,x_4)\prod_{j=3}^{4}(\cos x_2 - \cos x_j).$$

En répétant la démarche, on obtient

$$\det M = \alpha\prod_{1\le i<j\le 4}(\cos x_i - \cos x_j) = \alpha P_4.$$

Il reste à déterminer la valeur de α ...
Une démarche analogue à la précédente aurait donnée

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos(2x_1) \\ 1 & \cos x_2 & \cos(2x_2) \\ 1 & \cos x_3 & \cos(2x_3) \end{vmatrix} = \beta P_3$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_1 \\ 1 & \cos x_2 \end{vmatrix} = \gamma P_2 \text{ avec } \gamma = -1.$$

En développant $\det M$ selon la dernière ligne et en considérant le coefficient dominant de $\det M$ vu comme polynôme en $\cos(x_3)$ on obtient

$$4\beta P_3 = (-1)^3 \alpha P_3$$

et de façon analogue on a aussi

$$2\gamma P_2 = (-1)^2 \beta P_2.$$

On en déduit

$$\alpha = 8.$$

Puisque $\operatorname{Card} \mathcal{S}_4 = 24$, $\det M$ peut se voir comme la somme de 24 termes qui sont tous inférieurs à 1 en valeur absolue. On en déduit

$$|\det M| \leq 24.$$

Certains des termes (par exemple $1 \times \cos(x_1) \times \cos(2x_2) \times \cos(3x_3)$) étant strictement inférieurs à 1 en valeur absolue, on a aussi

$$|\det M| < 24.$$

Exercice 37 : [énoncé]

(a) $\langle v(e_i), e_i\rangle$ est le coefficient diagonal d'indice i de la matrice figurant v dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. La quantité S correspond à la trace de v.

(b) La somme

$$\sum_j^n \langle v(e_i), f_j\rangle^2$$

correspond à la norme au carrée du vecteur $v(e_i)$ et donc

$$T = \sum_{i=1}^n \left\|v(e_i)\right\|^2.$$

Notons A la matrice figurant l'endomorphisme v dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et w l'endomorphisme figuré dans cette base par la matrice ${}^tAA$. On remarque, pour x vecteur de E de colonne coordonnées X,

$$\left\|v(x)\right\|^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX^tAAX = \langle x, w(x)\rangle.$$

On en déduit

$$T = \sum_{i=1}^n \langle w(e_i), e_i\rangle = \operatorname{tr} w.$$

(c) Si v est un projecteur orthogonal, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ dans lequel il est figuré par une matrice diagonale avec r coefficients 1 et le reste de 0. On a alors

$$T = \sum_{i=1}^n \left\|v(e_i)\right\|^2 = r.$$

Exercice 38 : [énoncé]

(a) On reconnaît une restriction du produit scalaire usuel sur l'espace des fonctions réelles continues sur $[0\,;1]$.

(b) La distance f_2 à g sera minimale quand g est le projeté orthogonal de f_2 sur $\operatorname{Vect}(f_1, f_3)$.
Ce projeté g vérifie $(f_2 - g \,|\, f_1) = (f_2 - g \,|\, f_3) = 0$ ce qui donne le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = \mathrm{e} - 1 \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = 1. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $a = 18 - 6\mathrm{e}$ et $b = 4\mathrm{e} - 10$.

Exercice 39 : [énoncé]

(a) $(A \,|\, B) = \operatorname{tr}\left(A^tB\right)$ définit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(A \,|\, B) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

(b) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(A \,|\, B) = \operatorname{tr}(A^tB) = -\operatorname{tr}(AB) \text{ et } (A \,|\, B) = (B \,|\, A) = \operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}(AB).$$

On en déduit $(A \,|\, B) = 0$.
Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc en somme directe.
Puisqu'on peut écrire pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$M = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) + \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$$

avec $\frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
La distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à la distance de M à son projeté orthogonal sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ *i.e.*

$$d(M, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\left\|M - {}^tM\right\| = 2.$$

(c) H est le noyau de la forme linéaire non nulle trace, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice I_n est orthogonale à tout élément de H et c'est donc un vecteur normal à l'hyperplan H.
On en déduit
$$d(H,J) = \frac{|(I_n \mid J)|}{\|I_n\|} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Si $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ alors le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul et par conséquent
$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
La famille (P_0, P_1, P_2) est donc libre. Elle n'est pas orthogonale puisque $(P_0 \mid P_2) = 1/3 \neq 0$.

(b) $R_0 = P_0$, $\|R_0\| = 1$, $Q_0 \colon x \mapsto 1$
$(P_0 \mid P_1) = 0$, $R_1 = P_1$, $\|R_1\| = 1/\sqrt{3}$, $Q_1 \colon x \mapsto \sqrt{3}x$.
$R_2 = P_2 + \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1$.
$(R_2 \mid R_0) = 0$ donne $\lambda_0 = -(P_2 \mid P_0) = -1/3$,
$(R_2 \mid R_1) = 0$ donne $\lambda_1/3 = -(P_2 \mid R_1) = 0$.
$R_2 \colon x \mapsto x^2 - 1/3$, $\|R_2\| = \frac{2}{3\sqrt{5}}$, $Q_2 \colon x \mapsto \frac{\sqrt{5}}{2}\left(3x^2 - 1\right)$.

(c) Le projeté orthogonal de P_3 sur F est
$$R = (Q_0 \mid P_3)Q_0 + (Q_1 \mid P_3)Q_1 + (Q_2 \mid P_3)Q_2$$
soit, après calculs
$$R \colon x \mapsto \frac{3}{5}x.$$
La distance de P_3 à F est alors
$$d = \|P_3 - R\| = \frac{2}{5\sqrt{7}}.$$

Exercice 41 : [énoncé]

Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales, c'est donc une matrice orthogonale.
En développant selon une rangée $\det M = -1$.
Puisque la matrice M est de surcroît symétrique, c'est une matrice de réflexion par rapport à un plan. Ce plan est celui de vecteur normal ${}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) cf. cours !

(b) Au terme des calculs, on obtient la base (P_0, P_1, P_2) avec
$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, P_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X \text{ et } P_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Le déterminant de A se calcule par une formule compatible avec le calcul en congruence modulo 2.

(b) Répartir les jetons dans la matrice revient à déterminer une bijection de $[\![1\,;9]\!]$ vers lui-même. On en déduit $\operatorname{Card}\mathcal{M} = 9! = 362\,880$.

(c) À chaque matrice de Ω on fait correspondre une matrice de Δ par calcul des restes $r_{i,j}$ des divisions euclidiennes modulo 2. Pour une matrice de Ω, si l'on permute les jetons impairs d'une part, et les jetons pairs d'autre part, la matrice de Δ obtenue à la fin est la même. On en déduit
$$\operatorname{Card}\Omega = 5!4!\operatorname{Card}\Delta.$$

(d) Formons une matrice de Δ dont une colonne possède trois coefficients égaux à 1. On choisit cette colonne et il reste deux 1 à positionner. Ceux-ci ne peuvent figurer sur la même colonne car on obtient sinon un déterminant nul. Ils ne peuvent figurer sur la même ligne pour la même raison. S'ils ne figurent ni sur la même ligne, ni sur la même colonne, la matrice est convenable. On en déduit
$$K_1 = 3 \times 3 \times 2.$$
On choisit la colonne comportant un 1 et deux 0, les deux autres colonnes comportant un 0 et deux 1, puis on positionne le 1 dans la première colonne et les deux zéros dans les deux autres. Pour que la matrice obtenue soit de déterminant impair, il faut et il suffit que ces deux derniers zéros ne soient pas choisis sur la même ligne. On en déduit
$$K_2 = 3 \times 3 \times 3 \times 2.$$

(e) Si une matrice de Δ possède une colonne dont trois coefficients sont égaux à 1, elle ne possède pas deux colonnes possédant exactement un coefficient nul. Aussi, si une matrice de Δ ne possède pas de colonne dont trois coefficients sont égaux à 1, elle possède deux colonnes possédant exactement un coefficient nul.
$$\operatorname{Card}\Delta = K_1 + K_2 = 72 \text{ et } \operatorname{Card}\Omega = 207\,360.$$

(f) $p = 4/7$.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) $\varphi(n)$ détermine le nombre d'entiers de $[\![1\,;n]\!]$ premiers avec n. C'est aussi le nombre d'inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On sait

$$\varphi(n) = n\prod_{k=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

(b) Il y a exactement n/d multiples de d dans $[\![1\,;n]\!]$, ce sont $d, 2d, \dots, n$. On en déduit $\mathrm{P}\big(D(d)\big) = 1/d$.

(c) Les entiers ℓ de Ω premiers avec n sont tels que $\ell \wedge n = 1$, ils correspondent aux entiers qui ne sont divisibles par aucun des facteurs premiers de n.

(d) Les événements $D(p_1), \dots, D(p_r)$ sont mutuellement indépendants car, si $1 \le i_1 < \dots < i_s \le r$, on a

$$D(p_{i_1}\dots p_{i_s}) = D(p_{i_1}) \cap \ldots \cap D(p_{i_s})$$

et donc

$$\mathrm{P}\big(D(p_{i_1}) \cap \ldots \cap D(p_{i_s})\big) = \frac{1}{p_{i_1}\dots p_{i_s}} = \mathrm{P}\big(D(p_{i_1})\big) \times \dots \times \mathrm{P}\big(D(p_{i_s})\big).$$

L'indépendance des $D(p_1), \dots, D(p_r)$ entraîne celle des événements contraires $\overline{D(p_1)}, \dots, \overline{D(p_r)}$ et donc

$$\mathrm{P}(A) = \prod_{k=1}^{r}\mathrm{P}\big(\overline{D(p_k)}\big) = \prod_{k=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Aussi,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

et on retrouve la formule précédente.

Exercice 45 : [énoncé]

(a) Puisque la série $\sum a_n$ converge, on peut introduire sa somme

$$\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Les termes sommés étant strictement positifs, on a $\ell > 0$ et $S_n \to \ell$ donne alors $S_n \sim \ell$.
On en déduit

$$\frac{a_n}{S_n} \sim \frac{a_n}{\ell}.$$

La série $\sum a_n$ converge, donc $\sum a_n/\ell$ converge aussi et par équivalence de séries à termes positifs, on peut conclure à la convergence de la série $\sum a_n/S_n$.

(b) Comme les termes sont positifs, on a $S_n \ge S_{n-1}$ et donc

$$\frac{a_n}{S_n^2} \le \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}.$$

La série à termes positifs $\sum a_n$ étant supposée divergente, la suite (S_n) tend vers $+\infty$ et donc $1/S_n \to 0$.
La nature de la série $\sum u_n - u_{n-1}$ étant celle de la suite (u_n), on peut affirmer la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

puis celle de $\sum a_n/S_n^2$ par comparaison de séries à termes positifs.

(c) On peut écrire

$$\frac{a_n}{S_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n}.$$

Si (S_{n-1}/S_n) ne tend pas vers 1, la série étudiée diverge grossièrement.
Si (S_{n-1}/S_n) tend vers 1 alors

$$\ln\frac{S_{n-1}}{S_n} \sim \frac{S_{n-1}}{S_n} - 1$$

et donc

$$\frac{a_n}{S_n} \sim \ln S_n - \ln S_{n-1}.$$

La suite $(\ln S_n)$ diverge, donc la série $\sum \ln S_n - \ln S_{n-1}$ diverge aussi et, enfin, $\sum a_n/S_n$ diverge par argument de comparaison de séries à termes positifs.

Exercice 46 : [énoncé]

(a)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+1}{3(n+1)} = 1 - \frac{2}{3}\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{2}{3n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{(1+1/n)^{3/4}} = 1 - \frac{3}{4n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc pour n assez grand,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(b) La suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est positive et croissante à partir d'un certain rang donc il existe $\alpha > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq \alpha v_n$. Or $\sum v_n$ diverge donc $\sum u_n$ aussi.