Exercice 1 [02582] [Correction]

(a) Montrer l'existence, pour $\theta \in]0\,;\pi[$, d'un majorant M_θ de la valeur absolue de
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta).$$

(b) Montrer que $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.

(c) En remarquant de $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, étudier la convergence de la série de terme général
$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\theta).$$

(d) En utilisant $\left|\cos(k\theta)\right| \geq \cos^2(k\theta)$, étudier la convergence de $\sum |u_n|$.

Exercice 2 [02515] [Correction]

Étudier la nature de la série de terme général
$$u_n = \ln\left(1 + \sin\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
pour $\alpha > 0$.

Exercice 3 [03371] [Correction]

(a) Déterminer la limite de la suite définie par
$$u_0 \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

(b) Déterminer la limite de la suite définie par
$$v_n = nu_n.$$

(c) Donner la nature de la série $\sum u_n$ et celle de la série $\sum (-1)^n u_n$

Exercice 4 [03584] [Correction]

On pose
$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

(a) Déterminer une suite de fonctions (f_n) telle que
$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Déterminer deux réels a et b tels que
$$I_n = a + \frac{b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exercice 5 [02348] [Correction]

(a) Justifier que
$$G(x,y) = \int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t$$
où $\lfloor t \rfloor$ représente la partie entière de t, est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

(b) Montrer que $G(x,y)$ tend vers une limite $G(x)$ quand y tend vers $+\infty$.

(c) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-\lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

(d) On note $H(n) = nG(n)$; montrer que la série de terme général
$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$$
converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

Exercice 6 [02538] [Correction]

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,;+\infty[$ telle que f'' est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

(a) Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(b) Étudier les séries
$$\sum f(n) \text{ et } \sum f'(n).$$

Exercice 7 [02509] [Correction]

(a) Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$
en effectuant notamment le changement de variable $x = \mathrm{e}^t$.

(b) En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

Exercice 8 [01770] [Correction]
Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
où f est continue, de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Étudier le prolongement par continuité de g en 0.

(b) Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x > 0$.

(c) Pour $0 < a < b$, montrer que
$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + ag^2(a) - bg^2(b)$$
puis montrer que
$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \le \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

(d) Étudier la nature de
$$\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 9 [03705] [Correction]

(a) a désigne un réel strictement supérieur à -1. En posant $x = \tan t$, montrer
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Donner en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série
$$\sum \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

(c) Même question pour
$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}.$$

(d) Donner la nature de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}.$$

Exercice 10 [03385] [Correction]

(a) Étudier l'intégrabilité sur $]1\,;+\infty[$ de
$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

(b) Montrer
$$\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{\ln 3}{2}.$$

Exercice 11 [02555] [Correction]
On considère
$$f : t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}.$$

(a) Étudier l'intégrabilité de f sur $]0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

(b) Calculer
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 12 [03375] [Correction]

(a) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \ge 1 + x.$$
En déduire
$$\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t^2 \le \mathrm{e}^{-t^2} \le \frac{1}{1+t^2}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

puis établir

$$I_n \le \frac{I}{\sqrt{n}} \le J_n.$$

(c) On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

Établir

$$I_n = W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1} = W_{2n}.$$

(d) Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2}.
En déduire la constance de la suite de terme général

$$u_n = (n+1)W_nW_{n+1}.$$

(e) Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I.

Exercice 13 [03785] [Correction]
On introduit l'application sur $[0\,;+\infty[$

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}.$$

(a) Étudier les convergences de la suite de fonctions (f_n).

(b) Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 14 [02558] [Correction]
Ensemble de définition et continuité de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+.

Exercice 15 [02527] [Correction]
Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) donnée par

$$f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x).$$

Exercice 16 [02532] [Correction]

(a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1+n^\alpha\mathrm{e}^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}_+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.

(b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.

(c) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 17 [02518] [Correction]
Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}.$$

Exercice 18 [03194] [Correction]
Définition, continuité et classe $\mathcal{C}^1$ de

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Exercice 19 [02529] [Correction]
Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\arctan(nx)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 20 [00039] [Correction]
On note E l'espace des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$.

(a) Montrer que
$$N_\infty(u)=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n| \quad\text{et}\quad N(u)=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_{n+1}-u_n|$$
définissent des normes sur l'espace E.

(b) Montrer que
$$N(u)\leq 2N_\infty(u)\quad\text{pour tout } u\in E.$$
Déterminer une suite non nulle telle qu'il y ait égalité.

(c) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 21 [03786] [Correction]
On munit $E=\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme
$$\|M\|=\max_{1\leq i,j\leq p}|m_{i,j}|.$$

(a) Soient X fixé dans $\mathbb{C}^p$ et P fixé dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$; montrer que
$$\phi(M)=MX \text{ et } \psi(M)=P^{-1}MP$$
définissent des applications continues.

(b) Montrer que
$$f(M,N)=MN$$
définit une application continue.

(c) Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $\left(\|A^n\|\right)$ soit bornée ; montrer que les valeurs propres de A sont de module inférieur à 1.

(d) Soit $B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite (B^n) tende vers une matrice C. Montrer que $C^2=C$; que conclure à propos du spectre de C ?
Montrer que les valeurs propres de B sont de module au plus égal à 1

Exercice 22 [02587] [Correction]
Soit u,v,w trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{R}$ (avec $a<b$). On suppose
$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a)\\ u(b) & v(b) & w(b)\\ u'(a) & v'(a) & w'(a)\end{vmatrix}=0.$$
Montrer qu'il existe $c\in\,]a\,;b[$ vérifiant
$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a)\\ u(b) & v(b) & w(b)\\ u''(c) & v''(c) & w''(c)\end{vmatrix}=0.$$

Exercice 23 [04941] [Correction]

(a) Montrer que, pour tout $a\in\,]0\,;1[$, l'intégrale suivante converge :
$$\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Justifier que, pour tout $a\in\,]0\,;1[$,
$$\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n(n+1)}.$$

(c) En déduire la convergence et la valeur de
$$\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 24 [02394] [Correction]
Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R=1$.
Pour $x\in\,]-1\,;1[$, on définit
$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$
On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0\,;1[$.

(a) Montrer que $\sum a_n$ est une série convergente.

(b) Montrer que
$$\lim_{x\to1^-}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

Exercice 25 [03699] [Correction]

(a) Quel est l'ensemble de définition de
$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ ?.$$

(b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec pour condition initiale $f(0)=0$.

(c) Montrer que f est développable en série entière et en donner le rayon de convergence.

Exercice 26 [03307] [Correction]
Soit (f_n) la suite des fonctions donnée par

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (-1)^n \ln(n) x^n.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$.
On note S sa somme.

(b) Montrer que

$$\forall x \in]-1\,;1[, S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}\right).$$

(c) En déduire que S admet une limite en 1^- et que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

(d) Calculer la limite ci-dessus en utilisant la formule de Wallis

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 27 [03694] [Correction]

(a) Étudier la parité de

$$f\colon x\mapsto \mathrm{e}^{x^2/2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle à déterminer.

(c) Justifier que f est développable en série entière et donner ce développement.

Exercice 28 [00038] [Correction]

(a) Étudier la convergence et préciser la limite éventuelle de (a_n) définie par

$$a_{n+1} = \ln(1+a_n) \text{ et } a_0 > 0.$$

(b) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

(c) Étudier la convergence de $\left(\sum a_n x^n\right)$ sur le bord de l'intervalle de convergence
(on pourra étudier la limite de $1/a_{n+1} - 1/a_n$ et utiliser le théorème de Cesaro)

Exercice 29 [03301] [Correction]
Développer $f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$ en série entière en l'exprimant à l'aide de fonctions exponentielles.
Retrouver le résultat en remarquant que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.

Exercice 30 [02500] [Correction]
Soient $k > 0$ et

$$f(x) = \int_0^1 t^k \sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) + (k+1)f(x) = \sin x.$$

(c) Déterminer toutes les fonctions développables en série entière en 0 solutions de $xy' + (k+1)y = \sin x$ en précisant le rayon de convergence.

Exercice 31 [02498] [Correction]
On considère l'équation différentielle

$$(E)\colon ty' + y = 3t^2\cos(t^{3/2}).$$

(a) Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) développable en série entière sur un voisinage de 0.

(b) Trouver l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire une expression plus simple de v.

Exercice 32 [03707] [Correction]

(a) Pour quel réel x, l'intégrale suivante existe-t-elle

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t}\ ?.$$

(b) Donner alors sa valeur.

(c) Montrer que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+\mathrm{e}^t}$$

est développable en série entière et exprimer ce développement.

Exercice 33 [02605] [Correction]
Soit $\alpha \in \,]-1\,;1[$.

(a) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite de terme général

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \left(1-\alpha^k x\right)$$

vers une limite que l'on notera $P(x)$.

(b) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(E)\colon \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1-x)f(\alpha x).$$

Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0)P(x).$$

(c) Montrer que la fonction $x \mapsto P(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34 [00078] [Correction]
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \,]0\,;\pi/2[$.

(a) Calculer la partie imaginaire du complexe

$$\frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-x\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}.$$

(b) En déduire le développement en série entière de

$$f(x) = \arctan\left(x - \frac{1}{\tan\theta}\right).$$

Exercice 35 [02512] [Correction]

(a) Quel est le domaine de définition de

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$$

pour $a \in \,]-1\,;1[\,$?

(b) Déterminer la limite et un équivalent de S en $+\infty$.

(c) Développer en série entière

$$S(x) - \frac{1}{x}.$$

Exercice 36 [00075] [Correction]
Calculer

$$S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

(on pourra calculer $S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+k}}{(3n+k)!}$ pour $k \in \{0,1,2\}$)

Exercice 37 [02525] [Correction]
Montrer que

$$f(x) = \arctan(1+x)$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Calculer cette série entière.

Exercice 38 [02414] [Correction]
Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R'.

(a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

(b) Déterminer le rayon de convergence et la somme de

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

Exercice 39 [02506] [Correction]
Soit $a \in \left]-1\,;1\right[$. On pose
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(a^n x).$$

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\left|f^{(k)}(x)\right|\leq\frac{1}{1-|a|}.$$

(c) Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 40 [02565] [Correction]
Trouver le rayon de convergence de
$$\sum_{n\geq 1}\frac{\operatorname{sh} n}{n(n+1)}x^n.$$
Calculer la somme dans le bon intervalle.

Exercice 41 [03298] [Correction]

(a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières
$$\sum\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)x^n \text{ et } \sum\sin(\mathrm{e}^{-n})x^n.$$

(b) Une série entière converge-t-elle normalement sur son disque ouvert de convergence ?

Exercice 42 [02551] [Correction]
Calculer
$$a_n=\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$$
pour $n\in\mathbb{N}^*$.
Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
Calculer la somme de cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 43 [03383] [Correction]
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par
$$a_0=\alpha, a_1=\beta \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$$
avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 44 [02523] [Correction]
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul.

(a) Montrer qu'il existe un réel $r>0$ tel que $|a_n|\leq 1/r^n$ à partir d'un certain rang.

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\frac{a_n}{n!}z^n$?

(c) On note $S_n=\sum_{k=0}^n a_k$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\frac{S_n}{n!}z^n$?

Exercice 45 [02534] [Correction]
On pose
$$\forall\theta\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}, a_n=\cos(n\theta).$$

(a) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ pour tout $x\in\left]-1\,;1\right[$.

(b) Montrer que pour tout $\theta\neq k\pi$, la série $\sum\frac{a_n}{n+1}$ converge et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

(c) Calculer cette intégrale pour $\theta\in\left]0\,;\pi\right[$.

Exercice 46 [02597] [Correction]
Montrer que $g\colon t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{2^{2n}(n!)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $h\colon t\mapsto g(t)\mathrm{e}^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$ existe et calculer son intégrale.

Exercice 47 [04155] [Correction]
Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose
$$S_n=\int_0^{+\infty}\frac{t^p}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer l'existence de l'intégrale définissant S_n.

(b) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T(a,b) = \int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t.$$

Simplifier l'expression de $T(a,b)$.

(c) Montrer que pour tout naturel n

$$S_0 = p!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+1}} + S_n.$$

(d) Montrer que la suite (S_n) converge vers 0.

(e) Montrer

$$S_0 = p!\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}.$$

Exercice 48 [04944] [Correction]

Soit

$$F\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$.

(b) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 49 [04945] [Correction]

(a) Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ converge et trouver sa limite.

(c) Étudier la convergence de $\sum (-1)^{n-1} I_n$ et calculer son éventuelle somme.

Exercice 50 [03781] [Correction]

Prouver l'égalité

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 51 [03311] [Correction]

Soit a, b deux réels strictement positifs.

(a) Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}$ de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

(c) Exprimer $F(x)$

Exercice 52 [00933] [Correction]

Établir

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 53 [02537] [Correction]

(a) Donner le domaine de définition de la fonction

$$\Gamma\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Calculer l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

(c) Expliquer rapidement pourquoi $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 54 [03800] [Correction]

Étudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 55 [03807] [Correction]
Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Montrer que la suite de terme général $u_n = n\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 56 [02392] [Correction]
Soit f une application réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ avec $0<a<1<b$ et $f(1)\neq 0$. Soit (f_n) la suite de fonctions telle que

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1+x^n}.$$

(a) Déterminer la limite simple de (f_n).

(b) Établir l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que

$$\int_a^1 t^{n-1}f_n(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{\ln 2}{n}f(1).$$

Exercice 57 [01771] [Correction]
Vérifier que la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 58 [02517] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}.$$

Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un segment $[a\,;b]$.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(0).$$

Exercice 59 [02556] [Correction]
Pour $x>0$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Calculer $F'(x)$ et en déduire l'expression de

$$G(x) = F(x)+F(1/x).$$

(c) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1}\frac{\ln t}{t^2+2t\operatorname{ch}(\theta)+1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 60 [03619] [Correction]
Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
On admet l'identité

$$\frac{x^2-1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{1+x^2t^2}-\frac{1}{1+t^2}$$

valable pour tout x et t dans $\mathbb{R}$

(b) Déterminer l'expression de $F(x)$.

Exercice 61 [02583] [Correction]
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Ensemble de définition de

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^x)^n}.$$

(b) Montrer que si $x > 1$, $\sum I_n(x)$ diverge.

(c) Calculer $I_n(2)$ pour $n \geq 1$.

Exercice 62 [02570] [Correction]
Soient p et k 2 entiers naturels, non nul. Soit $f_{p,k} \colon x \mapsto x^p (\ln x)^k$.

(a) Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0\,;1]$. Soit

$$K_{p,k} = \int_0^1 x^p (\ln x)^k \,\mathrm{d}x.$$

(b) Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.

(c) Exprimer $J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n \,\mathrm{d}x$ en fonction de n.

(d) On pose $I = \int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x$. Montrer

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 63 [01102] [Correction]

(a) Donner les limites éventuelles en $+\infty$ des suites de termes généraux

$$U_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \text{ et } V_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

(b) Quelles sont les natures des séries

$$\sum_{n\geq 1} U_n \text{ et } \sum_{n\geq 1} V_n\,?.$$

Exercice 64 [02360] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n l'application définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{e}^{nx}-1} & \text{si } x \in \,]0\,;+\infty[\\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Pour quelle valeurs de α la fonction f_n est-elle continue ? Dans la suite, on prendra cette valeur de α.

(b) Montrer que f_n est bornée.

(c) Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ existe pour $n \geq 2$.

(d) Exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ comme la somme d'une série.

Exercice 65 [02535] [Correction]
Quelles sont les fonctions continues f telles que

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t) f(t)\,\mathrm{d}t?$$

Exercice 66 [02419] [Correction]
Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x.$$

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Trouver toutes les fonctions f solution de l'équation étudiée.

Exercice 67 [03782] [Correction]
Résoudre sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$

$$y'(x) - \tan(x) y + (\cos x)^2 = 0.$$

Exercice 68 [02573] [Correction]
En indiquant les hypothèses nécessaires, effectuer le changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'équation différentielle

$$(1+t^2)x'' + tx' + a^2 x = 0$$

tel qu'elle devienne une équation à coefficients constants et la résoudre.

Exercice 69 [02540] [Correction]
On veut résoudre

$$(E) \colon (x+1)y'' - (3x+4)y' + 3y = (3x+2)\mathrm{e}^{3x}.$$

Si Δ est l'opérateur de dérivation et $Q(X) = X - 3$, on a $Q(\Delta)(y) = y' - 3y$.
Montrer l'existence d'un polynôme P de la forme $a(x)X + b(x)$ tel que (E) devienne

$$\big(P(\Delta) \circ Q(\Delta)\big)(y) = (3x+2)\mathrm{e}^{3x}.$$

Résoudre l'équation à l'aide du changement de variable $z = Q(\Delta)(y)$.

Exercice 70 [02528] [Correction]

(a) Montrer qu'il existe une solution h de l'équation

$$xy'' + y' + y = 0$$

développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.

(b) Montrer que h s'annule sur $]0\,;2[$.

(c) Montrer que h ne s'annule qu'une seule fois sur $]0\,;2[$.

Exercice 71 [03215] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\operatorname{Sp} A = \{-2, 1, 3\}.$$

(a) Exprimer A^n en fonction de A^2, A et I_3.

(b) Calculer

$$\operatorname{ch}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}.$$

Exercice 72 [03799] [Correction]

On pose

$$\vec{\gamma}_1(t) = a(1-t)\vec{i} + bt\vec{j} \text{ avec } 0 \leq t \leq 1.$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = a\cos(s)\vec{i} + b\sin(s)\vec{j} \text{ avec } 0 \leq s \leq \pi/2$$

et le champ de vecteurs

$$\vec{V} = y\vec{i} + 2x\vec{j}.$$

(a) Représenter les courbes paramétrées par $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$.

(b) Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel $U(x, y)$?

(c) Calculer la circulation de $\vec{V}$ selon $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$. Conclure.

Exercice 73 [02530] [Correction]

(a) Étudier les branches infinies, les variations, la convexité et représenter $f(t) = t - \ln t - \frac{1}{t}$.

(b) Résoudre $f(t) = 0$.

(c) Trouver les extremums globaux et locaux de

$$g(x, y) = x\ln y - y\ln x.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On a
$$S_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}\right)$$
donc
$$|S_n| \leq \frac{2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|} = M_\theta.$$
Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1)-x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x-1)^2} \leq 0$$
donc f est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
$u_n = f(n)\cos(n\theta) = f(n)(S_n - S_{n-1})$ donc
$$\sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} f(n)S_n - \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1)S_n = \sum_{n=2}^{N}\big(f(n)-f(n+1)\big)S_n + f(N+1)S_N - f(2)S_1.$$
Or $f(N+1)S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ car $S_N = \mathrm{O}(1)$ et $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
De plus
$$\left|\big(f(n)-f(n+1)\big)S_n\right| \leq M_\theta\big(f(n)-f(n+1)\big)$$
avec $\sum f(n)-f(n+1)$ série convergente (car f converge en $+\infty$) donc par comparaison $\sum\big(f(n)-f(n+1)\big)S_n$ est absolument convergente.
Ainsi par opérations, $\left(\sum_{n=2}^{N} u_n\right)_{N\geq 2}$ converge et donc $\sum u_n$ converge.
On a
$$|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n-1}\left|\cos(n\theta)\right| \geq \frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos^2(n\theta).$$
Or $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donc $\cos^2 a \geq \frac{1}{2}\cos 2a + 1$ puis
$$|u_n| \geq \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(2n\theta) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}.$$
En reprenant l'étude qui précède avec 2θ au lieu de θ, on peut affirmer que
$$\sum \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(2n\theta)$$
converge tandis que $\sum \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)}$ diverge puisque $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
Par comparaison, on peut affirmer que $\sum|u_n|$ diverge.

Exercice 2 : [énoncé]
Par développement
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n$$
avec
$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ et } w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$
$\sum v_n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées et $\sum w_n$ converge si, et seulement si, $2\alpha > 1$ par équivalence de termes généraux de séries de signe constant. Au final, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) La suite étudiée est bien définie et à termes tous positifs. On en déduit
$$0 \leq u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$
et donc par encadrement $u_n \to 0$.

(b) Pour $n \geq 1$, on peut écrire $v_n = \mathrm{e}^{-u_{n-1}}$ et alors $v_n \to 1$ par composition de limites.

(c) On en déduit
$$u_n \sim 1/n.$$
La série $\sum u_n$ est alors divergente par équivalence de séries à termes positifs.
On a aussi
$$u_n = \frac{\mathrm{e}^{-u_{n-1}}}{n} = \frac{1-u_{n-1}+\mathrm{o}(u_{n-1})}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc
$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série $\sum(-1)^n/n$ converge en vertu du critère spéciale et $\sum \mathrm{O}(1/n^2)$ est absolument convergente par argument de comparaison. Par opération sur les séries convergentes, la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Exercice 4 : [énoncé]
Notons que l'intégrale I_n est bien définie.

(a) On découpe l'intégrale en deux

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}.$$

On réalise le changement de variable $x = 1/t$ sur la deuxième intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} + \int_1^0 -\frac{t^{n-2}\,\mathrm{d}t}{1+t^n}$$

puis on combine les deux intégrales pour obtenir

$$I_n = \int_0^1 \frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

(b) On peut écrire

$$I_n = 1 + \int_0^1 \frac{t^{n-2}-t^n}{(1+t^n)}\,\mathrm{d}t.$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 t\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

ce qui donne par intégration par parties

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\ln 2 - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$0 \le \int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_{]0;1]} \frac{1}{t}\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$$

avec par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t}\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(1+t^n)}{t}\right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Quand $\varepsilon \to 0^+$, on obtient

$$\int_{]0;1]} \frac{1}{t}\frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \ln 2 + \int_{]0;1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

où, sachant $\ln(1+u) \le u$,

$$0 \le \int_{]0;1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{n-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1} \to 0.$$

On en déduit

$$I_n = 1 + \mathrm{o}(1/n).$$

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Soient $x, y > 0$.
La fonction

$$f\colon t \mapsto \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+x)}$$

est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[\supset]0\,;y]$ et quand $t \to 0$,

$$f(t) = \frac{t}{t(t+x)} = \frac{1}{t+x} \to \frac{1}{x}$$

donc f est prolongeable par continuité en 0.
Par suite l'intégrale définissant $G(x,y)$ existe bien.

(b) Quand $t \to +\infty$,

$$f(t) = \frac{\mathrm{O}(1)}{t(t+x)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Par suite $G(x,y)$ converge quand $y \to +\infty$ vers

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t(t+x)}\,\mathrm{d}t.$$

(c) On remarque que

$$\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+n}\right)$$

et on en déduit

$$G(n,y) = \frac{1}{n}\int_0^y \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t} - \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t+n}\,\mathrm{d}t.$$

Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient

$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^y \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_n^{y+n} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

Enfin par la relation de Chasles

$$G(n,y) = \frac{1}{n}\left(\int_0^n \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t - \int_y^{y+n} \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t}\,\mathrm{d}t\right).$$

(d) Puisque
$$0 \leq \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{y} \int_y^{y+n} t - \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t \leq \frac{n}{y}$$
on obtient quand $y \to +\infty$
$$G(n) = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} \,\mathrm{d}t$$
et on a alors
$$H(n) = \int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} \,\mathrm{d}t.$$
Par suite
$$H(n) - H(n-1) = \int_{n-1}^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{u}{u + (n-1)} \,\mathrm{d}u$$
puis
$$H(n) - H(n-1) = 1 - (n-1) \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$
Par développement limité, on obtient
$$H(n) - H(n-1) = \frac{1}{2(n-1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
On en déduit que la série de terme général
$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Posons
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}\right).$$
On a
$$\sum_{k=1}^{n} \left(H(k) - H(k-1) - \frac{1}{2k}\right) = S + \mathrm{o}(1)$$
donc
$$H(n) - H(1) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = S + \mathrm{o}(1).$$
Sachant
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$
on obtient
$$H(n) \sim \frac{1}{2} \ln n$$
puis
$$G(n) \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut écrire
$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) \,\mathrm{d}t.$$
Par intégrabilité de f'', la fonction f' admet une limite finie ℓ quand $x \to +\infty$.
Si $\ell > 0$ alors, pour x assez grand $f'(x) \geq \ell/2$. Notons $A \geq 0$ tel que ce qui précède soit vrai pour $x \geq A$. On a alors
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \,\mathrm{d}t \geq f(0) + \int_0^A f'(t) \,\mathrm{d}t + \int_A^x \frac{\ell}{2} \,\mathrm{d}t$$
et donc $f(x) \geq \ell x/2 + C^{te}$ ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t$.
Si $\ell < 0$ on obtient aussi une absurdité. Il reste donc $\ell = 0$.
Posons
$$F(x) = \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t.$$
Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale
$$F(x+1) = F(x) + f(x) + \int_x^{x+1} (x + 1 - t) f'(t) \,\mathrm{d}t.$$
Quand $x \to +\infty$,
$$F(x), F(x+1) \to \int_0^{+\infty} f(t) \,\mathrm{d}t.$$
Aussi $f'(x) \to 0$ et
$$\left| \int_x^{x+1} (x + 1 - t) f'(t) \,\mathrm{d}t \right| \leq \max_{t \in [x; x+1]} \left| f'(t) \right| \to 0$$
donc par opération $f(x) \to 0$.

(b) Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale

$$f(n+1)=f(n)+f'(n)+\int_n^{n+1}((n+1)-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$f'(n)=f(n+1)-f(n)+\int_n^{n+1}(n+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

La série de terme général $f(n+1)-f(n)$ est convergente car de même nature que la suite $(f(n))$ qui converge en $+\infty$. La série de terme général $\int_n^{n+1}(n+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente car

$$\left|\int_n^{n+1}(n+1-t)f''(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_n^{n+1}\left|f''(t)\right|\mathrm{d}t$$

et le terme majorant est sommable par intégrabilité de f''.
Par conséquent, la série $\sum f'(n)$ est convergente.
Aussi

$$F(n+1)=F(n)+f(n)+\frac{1}{2}f'(n)+\int_n^{n+1}\frac{(n+1-t)^2}{2}f''(t)\,\mathrm{d}t.$$

On peut alors mener le même raisonnement et conclure que $\sum f(n)$ converge.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) L'intégrale de départ est bien définie. En effet, la fonction $f\colon x\mapsto(1+x^2)/(1+x^4)$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et on vérifie $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}1/x^2$ ce qui donne un argument d'intégrabilité.
Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $x=\mathrm{e}^t$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2t}+1}{\mathrm{e}^{4t}+1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{ch}2t}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\operatorname{ch}2t=2\operatorname{ch}^2t-1=1+2\operatorname{sh}^2t.$$

Par le nouveau changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $u=\operatorname{sh}t$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}u)\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone $x=1/t$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Soit F une primitive de la fonction continue f. On a

$$g(x)=\frac{1}{x}\big(F(x)-F(0)\big)\xrightarrow[x\to0^+]{}F'(0)=f(0).$$

Ainsi on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0)=f(0)$.

(b) Soit F une primitive de f (il en existe car f est continue).
On a

$$g(x)=\frac{1}{x}\big(F(x)-F(0)\big).$$

On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}\big(F(x)-F(0)\big)+\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-g(x)}{x}.$$

(c) Par intégration par parties

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t=\left[tg^2(t)\right]_a^b-2\int_a^b tg'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t=\left[tg^2(t)\right]_a^b-2\int_a^b\big(f(t)-g(t)\big)g(t)\,\mathrm{d}t$$

puis la relation proposée.
On en déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\le2\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}+ag^2(a)$$

puis

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t-2\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}\le ag^2(a)$$

en ajoutant un même terme de part et d'autre

$$\left(\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}-\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\right)^2\leq ag^2(a)+\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

puis par la croissance de la fonction racine carrée

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}-\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\leq\left|\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}-\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\right|$$
$$\leq\sqrt{ag^2(a)+\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

et enfin

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}\leq\sqrt{\int_0^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}+\sqrt{ag^2(a)+\int_0^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$
$$\leq\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}+\sqrt{ag^2(a)+\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

(d) En faisant tendre a vers 0, on obtient

$$\sqrt{\int_0^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}\leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

et on en déduit que la fonction g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car les intégrales de g^2 sur les segments inclus dans $\mathbb{R}_+$ sont majorées.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) L'intégrale étudiée est bien définie pour $a>-1$ en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur le segment $[0\,;\pi/2]$. Par le changement de variable proposé, qui est $\mathcal{C}^1$ strictement monotone, on obtient

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2(t)}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a)x^2}.$$

En considérant $u=x\sqrt{1+a}$, on détermine une primitive de la fonction intégrée

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(1+a)x^2}=\left[\frac{1}{\sqrt{1+a}}\arctan\left(\sqrt{1+a}x\right)\right]_0^{+\infty}.$$

Finalement

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin^2(t)}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Par la symétrie du graphe de fonction sinus en $\pi/2$, on peut directement affirmer

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)}=2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)}.$$

Le calcul qui précède donne alors

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)}=\frac{\pi}{\sqrt{1+(n\pi)^\alpha}}\sim\frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série étudiée converge si, et seulement si, $\alpha>2$.

(c) Pour $t\in[n\pi\,;(n+1)\pi]$, on a

$$1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)\leq 1+t^\alpha\sin^2(t)\leq 1+((n+1)\pi)^\alpha\sin^2(t).$$

Puis en passant à l'inverse et en intégrant, on obtient l'encadrement

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+((n+1)\pi)^\alpha\sin^2(t)}\leq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}\leq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha\sin^2(t)}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série étudiée équivaut à la convergence de la série précédente. La condition attendue est donc encore $\alpha>2$.

(d) Les sommes partielles de la série étudiée ci-dessus correspondent aux intégrales suivantes

$$\int_0^{n\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha\sin^2(t)}.$$

La fonction intégrée étant positive et la suite de segments $[0\,;n\pi]$ étant croissante et de réunion $\mathbb{R}_+$, la convergence de l'intégrale proposée entraîne la convergence de la série et inversement. On conclut que l'intégrale étudiée converge si, et seulement si, $\alpha>2$.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur $]1\,;+\infty[$.
Quand $x\to 1^+$,

$$f(x)\sim\frac{\sqrt{(x-1)}}{(x-1)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

et quand $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{1,0001}}\right)$$

donc f est intégrable sur $]1\,;+\infty[$.

(b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \le \left(\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\right)^{1/2}\left(\int_2^3 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

En calculant les intégrales introduites

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \le \left(1-\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\left((\ln 3)^2-(\ln 2)^2\right)\right)^{1/2} \le \frac{\ln 3}{2}.$$

Exercice 11 : [énoncé]

(a) La fonction f est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t \to 0^+$, $\sqrt{t}f(t) \to 0$ et quand $t \to +\infty$, $t^{3/2}f(t) \to 0$ donc f est intégrable sur $]0\,;1]$ et $[1\,;+\infty[$.

(b) Par une intégration par parties où l'on choisit judicieusement une primitive s'annulant en 0

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\ln t\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\ln 2.$$

Par le changement de variable $u = 1/t$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln u}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u = \ln 2.$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Il suffit d'étudier la variation de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - (1+x)$ pour obtenir cette inégalité de convexité classique. On en déduit

$$1 - t^2 \le \mathrm{e}^{-t^2} = \frac{1}{\mathrm{e}^{t^2}} \le \frac{1}{1+t^2}.$$

(b) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Puisque $t^2\mathrm{e}^{-t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, cette fonction est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ ce qui assure l'existence de I.
La fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$ est définie et continue par morceaux sur le segment $[0\,;1]$, donc l'intégrale définissant I_n existe.
La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)^n$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Puisque $1/(1+t^2)^n \underset{t\to+\infty}{\sim} 1/t^{2n}$ avec $2n > 1$, cette fonction est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ ce qui assure l'existence de J_n.
On a

$$(1-t^2)^n \le \mathrm{e}^{-nt^2} \le \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

donc

$$I_n \le \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \le \frac{I}{\sqrt{n}}$$

et

$$\frac{I}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \le J_n.$$

(c) Le changement de variable $t = \sin x$ donne $I_n = W_{2n+1}$.
Le changement de variable $t = \tan x$ donne $J_{n+1} = W_{2n}$.

(d) Par intégration par parties

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

On en déduit $u_{n+1} = u_n$ donc la suite (u_n) est constante égale à

$$u_1 = \pi/2.$$

(e) Puisque

$$\forall x \in [0\,;\pi/2], (\cos x)^{n+1} \le (\cos x)^n \le (\cos x)^{n-1}$$

on obtient en intégrant

$$W_{n+1} \le W_n \le W_{n-1}.$$

Or

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1}W_{n-1} \sim W_{n-1}$$

donc par encadrement

$$W_{n+1} \sim W_n.$$

On en déduit

$$u_n \sim nW_n^2$$

puis

$$W_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}.$$

Par suite

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \text{ et } J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

L'encadrement du b) donne alors

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Par croissance comparée, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n et affirmer

$$\sup_{x\in[a;+\infty[} \left|f_n(x)\right| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}.$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à 1.
Il ne peut y avoir convergence normale sur $[a\,;+\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.
En revanche sur $[0\,;a]$, il y a convergence normale car pour n assez grand de sorte que $n \geq a$, on a

$$\sup_{x\in[0;a]} \left|f_n(x)\right| = f_n(a).$$

Il y a aussi *a fortiori* convergence uniforme sur $[0\,;a]$.
Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme sur une voisinage de $+\infty$, on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité $1 = 0$.
Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 14 : [énoncé]

Pour $x \leq 0$, il y a divergence grossière.
Pour $x > 0$, $n^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}+2\ln n} \to 0$ donc $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Ainsi f est définie sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $a > 0$, sur $[a\,;+\infty[$, $\left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right| \leq \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$. Cela permet d'établir la convergence normale de la série de fonctions sur $[a\,;+\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;+\infty[$.
Par convergence uniforme sur $[1\,;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = 1.$$

Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant (avec $n = 0$ à part pour la majoration) on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}.$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{2}{x^2}$$

quand $x \to 0^+$.

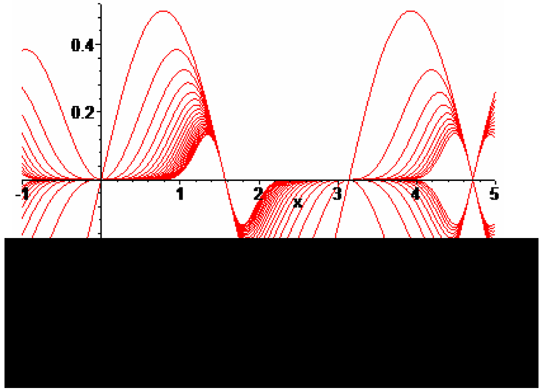

FIGURE 1 – Les premières fonctions de la suite (f_n)

Exercice 15 : [énoncé]
Pour $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ on a $|\sin x| < 1$ et donc $f_n(x) \to 0$.
Pour $x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\cos x = 0$ et donc $f_n(x) = 0 \to 0$.
Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Par 2π périodicité et parité on ne poursuit l'étude qu'avec $x \in [0\,;\pi]$. La fonction f_n est dérivable avec

$$f_n'(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1).$$

On peut dresser le tableau de variation de f_n sur $[0\,;\pi]$ et on obtient

$$\sup_{\mathbb{R}}|f_n| = \left|f_n\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right)^{n/2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0.$$

La suite de fonction (f_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) En distinguant le cas $x = 0$ du cas général, on obtient que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par $f(x) = x$.

(b) Par étude des variations de $f_n(x) - f(x)$, on obtient qu'il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

(c) Par un argument de convergence uniforme, on peut échanger limite et intégrale

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Exercice 17 : [énoncé]
f_n est définie sur $\mathbb{R}^*$ et peut être prolongée par continuité en 0 en posant sur $f_n(0) = n$.
Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \to +\infty$.
Pour $x > 0$, $f_n(x) \to 0$.
Ainsi, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il ne peut y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car alors, par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to0^+}\lim_{n\to+\infty}f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to0^+}f_n(x)$$

donne $0 = +\infty$.
Pour $a > 0$, sur $[a\,;+\infty[$,

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-a^2}}$$

et par étude fonctionnelle $nx^2\mathrm{e}^{-nx} \leq \frac{4}{n}\mathrm{e}^2$ (maximum en $x = 2/n$) donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{4\mathrm{e}^2}{n(1-\mathrm{e}^{-a^2})} \to 0$$

qui donne la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$.

Exercice 18 : [énoncé]
Posons

$$f_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Puisque les fonctions f_n sont toutes impaires, on limite l'étude à $x \in [0\,;+\infty[$.
À partir d'un certain rang N_x, on a $x/n \leq \pi/2$ et alors

$$\sin(x/n) \in [0\,;1].$$

La série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie alors les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang N_x et par conséquent cette série converge.
Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donc sa fonction somme, que nous noterons S, est définie sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

de sorte que

$$\|f_n'\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, *a fortiori* cette fonction est continue.

Exercice 19 : [énoncé]
Posons
$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\arctan(nx).$$
Chaque f_n est continue et $\|f_n\|_\infty = \frac{\pi}{2n^2}$ est terme général d'une série convergente.
Par convergence normale, on peut affirmer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$f_n'(x) = \frac{1}{n(1+(nx)^2)}.$$
Pour $a > 0$, sur $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;-a]$,
$$\|f_n'\|_\infty \le \frac{1}{n(1+(na)^2)}$$
ce qui donne la convergence normale de la série des dérivées.
Ainsi, par convergence uniforme sur tout segment, on obtient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) N_∞ est bien connue pour être une norme sur l'ensemble des fonctions bornées, il en est de même sur l'ensemble des suites bornées dont le premier terme est nul.
L'application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie. On vérifie aisément $N(u+v) \le N(u) + N(v)$ et $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$. Si $N(u) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ et puisque $u_0 = 0$, on obtient $u = 0$. Ainsi N est une norme sur E.

(b) Pour $u \in E$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - u_n| \le |u_{n+1}| + |u_n| \le 2N_\infty(u).$$
On en déduit
$$N(u) \le 2N_\infty(u).$$
La suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_n = (-1)^n$ pour $n \ge 1$ est une suite non nulle pour laquelle il y a égalité.

(c) Considérons la suite $u^{(p)}$ définie par
$$u^{(p)}(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \le p \\ p & \text{sinon.}\end{cases}$$
On a
$$u^{(p)} \in E, N_\infty(u^{(p)}) = p \text{ et } N(u^{(p)}) = 1.$$
On en déduit que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes car
$$\frac{N_\infty(u^{(p)})}{N(u^{(p)})} \to +\infty.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Les applications ϕ et ψ sont linéaires au départ d'un espace de dimension finie donc continues.

(b) L'application f est bilinéaire au départ d'un produit d'espaces de dimensions finies donc continue.

(c) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé
$$AX = \lambda X \text{ avec } X \ne 0.$$
On a alors
$$A^n X = \lambda^n X$$
donc
$$\left|\lambda^n\right| \|X\|_\infty = \left\|A^n X\right\| \le p\left\|A^n\right\| \|X\|_\infty$$
avec $\|X\|_\infty = \max_{1\le j\le p} |x_j| \ne 0$.
On en déduit que la suite (λ^n) est bornée et donc $|\lambda| \le 1$.

(d) $B^n \to C$ donc par extraction $B^{2n} \to C$. Or $B^{2n} = B^n \times B^n \to C^2$ donc par unicité de la limite $C = C^2$. On en déduit que $\mathrm{Sp}C \subset \{0,1\}$ car les valeurs propres figurent parmi les racines du polynôme annulateur $X^2 - X$.
Puisque la suite (B^n) converge, elle est bornée et donc les valeurs propres de B sont de modules inférieurs à 1.

Exercice 22 : [énoncé]
On introduit la fonction $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(x) & v(x) & w(x)\end{vmatrix}.$$
Cette fonction est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ avec
$$f'(x) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(x) & v'(x) & w'(x)\end{vmatrix}.$$

De plus, $f(a) = f(b) = 0$ et donc, par le théorème de Rolle, il existe $d \in]a\,;b[$ tel que $f'(d) = 0$. Au surplus, $f'(a) = 0$ et une nouvelle application du théorème de Rolle – à la fonction f' cette fois – donne l'existence de $c \in]a\,;d[\subset]a\,;b[$ telle

$$f''(c) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 23 : [énoncé]

(a) La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur $]0\,;a]$ et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur $-1/2$.

(b) Par développement en série entière, on a pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

et donc, pour tout $x]0\,;1[$,

$$\frac{x + \ln(1-x)}{x^2} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n}.$$

Après prolongement par continuité en 0, la fonction intégrée se confond avec la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. Celle-ci converge normalement sur $[0\,;a]$ ce qui permet d'intégrer terme à terme

$$\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^a \frac{x^{n-2}}{n}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{n(n-1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}.$$

(c) Posons $u_n(a) = \frac{a^n}{n(n+1)}$ pour $a \in [0\,;1]$.
Les fonctions u_n sont continues et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement car

$$\left|u_n(a)\right| \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{avec} \quad \sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ convergente.}$$

Par convergence uniforme, la somme de la série de fonctions est définie et continue en 1 et donc

$$\lim_{a \to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

On en déduit

$$\int_0^1 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -1$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \leq M$ pour tout $x \in [0\,;1[$.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Par sommation de termes positifs,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \leq S(x) \leq M.$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \leq M.$$

La séries à termes positifs $\sum a_n$ ayant ses sommes partielles bornées, elle converge.

(b) La fonction S est croissante sur $[0\,;1[$ et est bornée. On peut donc affirmer qu'elle converge en 1^- et introduire

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right).$$

De plus, cette valeur majore S sur $[0\,;1[$, de sorte qu'en reprenant l'étude ci-dessus avec cette valeur pour M, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right).$$

Inversement, pour tout $x \in [0\,;1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et donc à la limite quand $x \to 1^-$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

puis finalement l'égalité demandée.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) La fonction f est définie sur $]-1\,;1[$.

(b) On vérifie $(1-x^2)f'(x)-xf(x)=1$ et $f(0)=0$.

(c) $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1\,;1[$ et par suite la primitive $x\mapsto\arcsin x$ l'est aussi.
Par produit de fonctions développable en série entière sur $]-1\,;1[$, f l'est aussi.
Puisque f est impaire, le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}.$$

On a $f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}$ puis

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n}-\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_nx^{2n+2}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+2}$$

donc

$$(1-x^2)f'(x)-xf(x)=a_0+\sum_{n=0}^{+\infty}((2n+3)a_{n+1}-(2n+2)a_n)x^{2n+2}=1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière

$$a_0=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}a_n$$

d'où

$$a_n=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Puisque pour $x\neq 0$

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_nx^{2n+1}}\right|=\frac{4(n+1)^2x^2}{(2n+3)(2n+2)}\to x^2$$

on obtient $R=1$.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) $R=1$.

(b) Pour $x\in\,]-1\,;1[$, on a

$$(1+x)S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln(n)x^n+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln(n)x^{n+1}.$$

Après décalage d'indice et réunion des deux sommes

$$(1+x)S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\big(\ln(n+1)-\ln(n)\big)x^{n+1}$$

ce qui conduit à la relation demandée.

(c) Posons

$$g_n(x)=(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$$

ce qui définit $g_n\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}$ continue.
À l'aide du critère spécial des séries alternées, on montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ ce qui assure que sa somme est continue. On en déduit par opérations sur les limites

$$\lim_{x\to1^-}S(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

(d) En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\frac{2k}{2k+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{2n+1}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\right)^2\right).$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x\to1^-}S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 27 : [énoncé]

(a) La fonction f est impaire car produit d'une fonction paire par la primitive s'annulant en 0 d'une fonction paire.

(b) f est solution de l'équation différentielle

$$y' = xy + 1.$$

(c) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, ces primitives le sont donc aussi et, par produit de fonctions développable en série entière, on peut affirmer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Par imparité, on peut écrire ce développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

et l'équation différentielle donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)a_n = a_{n-1} \text{ et } a_0 = 1.$$

On en déduit

$$a_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}.$$

Exercice 28 : [énoncé]

(a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $a_0 > 0$, la suite récurrente (a_n) est bien définie et à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Sachant $\ln(1+x) \leq x$, on peut affirmer que la suite (a_n) est décroissante. Or elle est minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \geq 0$. En passant la relation $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ à la limite, on obtient $\ell = \ln(1+\ell)$ ce qui entraîne $\ell = 0$ (car $\ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$). Finalement $a_n \to 0^+$.

(b) On a alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_n} \to 1$$

et donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

(c) Pour $x = -1$, la série numérique

$$\sum a_n (-1)^n$$

converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0. Pour $x = 1$, déterminons la nature de la série numérique $\sum a_n$

On a

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + \mathrm{o}(a_n^2)}{a_n(a_n + \mathrm{o}(a_n))} \to \frac{1}{2}.$$

Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right) \to \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right) \to \frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$a_n \sim \frac{2}{n}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, $\sum a_n$ diverge.

Exercice 29 : [énoncé]

On a

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x} + \mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})x}\right)$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n + (-1+\mathrm{i})^n + (-1-\mathrm{i})^n}{4n!} x^n.$$

On a $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ etc, donc

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n + (-1+\mathrm{i})^n + (-1-\mathrm{i})^n &= 2\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{3n\pi}{4}\right) \\ &= 4\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Finalement

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p \cos(\frac{p\pi}{2})}{(2p)!} x^{2p} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q 2^{2q}}{(4q)!} x^{4q}.$$

Retrouvons ce résultat, en exploitant l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.
La fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ par produit de telles fonctions. De plus, la fonction f est paire donc le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$, on obtient

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4} + 4a_n = 0.$$

Puisque $a_0 = 1$, $a_1 = a_3 = 0$ (par imparité) et $a_2 = 0$ (par calculs), on obtient

$$a_{4q} = \frac{(-1)^q 4^q}{(4q)!} \text{ et } a_{4q+1} = a_{4q+2} = a_{4q+3} = 0$$

ce qui conduit au développement précédent.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) $(x,t) \mapsto t^k \sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0\,;1]$ donc, par intégration sur un segment, f est continue.

(b) $(x,t) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(t^k \sin(xt))$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0\,;1]$ donc par intégration sur un segment, f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 xt^k \cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit

$$xf'(x) + (k+1)f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(t^k \sin(xt)\bigr)\,\mathrm{d}t = \sin x.$$

(c) Par analyse synthèse, on obtient une seule fonction solution :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+2+k)} x^{2n+2}$$

de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) Soit v la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. La fonction v est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$ et

$$tv'(t) + v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n t^n.$$

Parallèlement, sur $\mathbb{R}$

$$3t^2\cos(t^3/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 3t^{3n+2}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, v est solution de (E) sur $]-R\,;R[$ si, et seulement si,

$$a_{3n} = a_{3n+1} = 0 \text{ et } a_{3n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi la fonction v est déterminée de manière unique et de plus celle-ci existe puisque le rayon de convergence de la série entière définie par les a_n ci-dessus est $R = +\infty$.

(b) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0\,;+\infty[$.
La solution générale homogène est $y(t) = \lambda/t$.
Par la méthode de la variation de la constante, on peut proposer la solution particulière

$$y(t) = \frac{2\cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2}\sin(t^{3/2})}{t}$$

et finalement la solution générale

$$y(t) = \frac{2\cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2}\sin(t^{3/2})}{t} + \frac{\lambda}{t}.$$

Parmi les solutions, la seule pouvant être prolongée par continuité en 0 , et donc correspondre à v, est celle obtenue pour $\lambda = -2$.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) Si $x > -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x + \mathrm{e}^t)$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et intégrable car

$$t^2/(x+\mathrm{e}^t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

Si $x = -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x+\mathrm{e}^t)$ n'est pas définie en 0 et

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t}.$$

La fonction n'est donc pas intégrable et, puisque elle est positive, son intégrale diverge.

Si $x < -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x + \mathrm{e}^t)$ n'est pas définie en $t_0 = \ln(-x) \in]0\,;+\infty[$. Par dérivabilité en t_0, on obtient

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t + x} = \frac{1}{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{t_0}} \underset{t \to t_0}{\sim} \frac{1}{(t - t_0)\mathrm{e}^{t_0}}$$

et encore une fois l'intégrale diverge.

(b) Pour $x = 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + \mathrm{e}^t} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

Pour $x \neq 0$, posons le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$ qui définit une bijection de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + \mathrm{e}^t} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(x + u)}.$$

Par décomposition en éléments simples

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + \mathrm{e}^t} = \int_1^{+\infty} \frac{1/x}{u} - \frac{1/x}{x + u}\,\mathrm{d}u$$

et finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + \mathrm{e}^t} = \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$

(c) Pour $x \in]-1\,;1[$, on a

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

On en déduit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} x^n.$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Sachant $1 - \alpha^k x \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$, on peut affirmer que pour N assez grand

$$\forall k \geq N, 1 - \alpha^k x > 0.$$

Considérons alors la suite définie par la portion de produit au-delà du rang N

$$\left(\prod_{k=N}^{n} (1 - \alpha^k x)\right)_{n \geq N}.$$

On a

$$\ln\left(\prod_{k=N}^{n} (1 - \alpha^k x)\right) = \sum_{k=N}^{n} \ln(1 - \alpha^k x)$$

avec $\ln(1 - \alpha^k x) = \mathrm{O}(\alpha^k)$. La série de terme général α^k est absolument convergente et donc, par comparaison, la série $\sum \ln(1 - \alpha^k x)$ est aussi absolument convergente. On en déduit la convergence de la suite

$$\left(\sum_{k=N}^{n} \ln(1 - \alpha^k x)\right)_{n \geq N}$$

puis, en composant avec la fonction exponentielle, la convergence de la suite

$$\left(\prod_{k=N}^{n} (1 - \alpha^k x)\right)_{n \geq N}.$$

Enfin, en tenant compte de la portion initiale du produit définissant $P_n(x)$, on obtient la convergence de la suite $\big(P_n(x)\big)$

(b) Si f est solution de (E) alors

$$f(x) = (1 - \alpha x) f(\alpha x) = (1 - \alpha x)(1 - \alpha^2 x) f(\alpha^2 x) = \dots$$

Par récurrence, on obtient

$$f(x) = \prod_{k=0}^{n} (1 - \alpha^k x) f(\alpha^{n+1} x) = P_n(x) f(\alpha^{n+1} x).$$

Quand $n \to \infty$, $f(\alpha^{n+1} x) \to f(0)$ car f est continue et donc

$$f(x) = f(0) \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - \alpha^k x) = f(0) P(x).$$

(c) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$.
La somme de cette série entière est solution de (E) si, et seulement si,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \alpha^{n-1} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ceci équivaut à

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}.$$

Inversement, considérons alors la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1}\right)$$

de sorte que

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}.$$

Cette série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} \to 0$$

et l'étude qui précède assure que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) prenant la valeur 1 en 0.
En vertu de la question précédente, on peut affirmer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1}\right) x^n = P(x).$$

Exercice 34 : [énoncé]

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut affirmer $x \sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$ et par multiplication par la quantité conjuguée

$$\frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{|1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}.$$

On en déduit

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{\sin^2\theta}{1 - 2x\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta}.$$

(b) La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, après calculs

$$f'(x) = \frac{\sin^2\theta}{1 - 2x\sin\theta\cos\theta + x^2\sin^2\theta}.$$

Pour $|x\sin\theta| < 1$, on a

$$\frac{\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (x\sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sin\theta)^{n+1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} x^n.$$

On en déduit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sin\theta)^{n+1} \sin\big((n+1)\theta\big) x^n$$

puis, par intégration de développement en série entière,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin\theta)^n \sin(n\theta)}{n} x^n$$

avec

$$f(0) = -\arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \arctan\big(\tan(\theta - \pi/2)\big) = \theta - \pi/2$$

car $\theta - \pi/2 \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$.

Exercice 35 : [énoncé]

(a) S est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

(b) Par convergence normale sur $[1\,;+\infty[$, on peut intervertir limites et sommes infinies pour justifier,

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

de sorte que

$$S(x) \sim \frac{1}{(1-a)x}.$$

(c) Pour $|x| < 1$;

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m.$$

Or $\sum \left|(-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m\right|$ converge et $\sum \sum_{m=0}^{+\infty} \left|(-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m\right|$ converge. Par le théorème de Fubini, on peut permuter les sommes infinies et affirmer

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^{m+1}}\right) x^m.$$

Exercice 36 : [énoncé]
Les séries entières définissant S_0, S_1 et S_2 sont de rayons de convergence $R = +\infty$.
Pour $x \in \mathbb{C}$, on a

$$S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

On a aussi

$$S_0(x) + jS_1(x) + j^2 S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(jx)^n}{n!} = \exp(jx)$$

et

$$S_0(x) + j^2 S_1(x) + jS_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j^2x)^n}{n!} = \exp(j^2 x).$$

En sommant ces trois relations, on obtient

$$S_0(x) = \frac{1}{3}\big(\exp(x) + \exp(jx) + \exp(j^2x)\big).$$

Exercice 37 : [énoncé]
La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1+(1+x)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2}$$

est une fraction rationnelle dont 0 n'est pas pôle. La fonction f' puis f sont développables en série entière et les rayons de convergence des séries entières correspondantes sont égaux.

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1/2\mathrm{i}}{x+1-\mathrm{i}} - \frac{1/2\mathrm{i}}{x+1+\mathrm{i}} = \mathrm{Re}\left(\frac{-\mathrm{i}}{x+1-\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+1-\mathrm{i}}\right)$$

avec

$$\frac{1}{x+1-\mathrm{i}} = \frac{1}{1-\mathrm{i}}\frac{1}{1+\frac{x}{1-\mathrm{i}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1-\mathrm{i})^{n+1}} x^n$$

avec un rayon de convergence $R = \sqrt{2}$.
Comme $1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$ on a

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\frac{(3n+1)\pi}{4}}{2^{(n+1)/2}} x^n$$

puis

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\frac{(3n+1)\pi}{4}}{(n+1)2^{(n+1)/2}} x^{n+1}$$

avec $R = \sqrt{2}$.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, pour $|x| < \min(R, R')$, $\sum c_n x^n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right).$$

Ainsi le rayon de convergence R'' de $\sum c_n x^n$ vérifie $R'' \geq \min(R, R')$.
En revanche, on ne peut facilement rien dire de plus de façon générale. Par exemple $1 - x$ et $\frac{1}{1-x}$ se développent en série entière de rayons de convergence $+\infty$ et 1 et leur produit de Cauchy est de rayon de convergence $+\infty$ ...

(b) Puisque $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$, on obtient facilement $R = 1$.
Si l'on pose $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$ et $b_k = 1$ pour $k \geq 0$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Par suite, pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 39 : [énoncé]

(a) $\left|\sin(a^n x)\right| \leq |x|\left|a^n\right|$, il y a donc convergence absolue de la série définissant $f(x)$.

(b) $f_n \colon x \mapsto \sin(a^n x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \leq |a|^{nk}$ terme général d'une série absolument convergente donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^{nk} = \frac{1}{1-|a|^k} \leq \frac{1}{1-|a|}.$$

(c) Par la formule de Taylor-Laplace,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{1}{1-|a|}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0.$$

Ainsi la série de Taylor de f converge sur $\mathbb{R}$ vers f et donc f est développable en série entière.

Exercice 40 : [énoncé]

Par la règle de d'Alembert, $R=1/\mathrm{e}$.
Sur $[-1/\mathrm{e}\,;1/\mathrm{e}]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}n}{n(n+1)}x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\mathrm{e}x)^n}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x/\mathrm{e})^n}{n(n+1)}\right).$$

Or sur $]-1\,;1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y^n}{n+1}=-\ln(1-y)+\frac{1}{y}(\ln(1-y)+y).$$

Cette identité pouvant être prolongée en -1 et en 1 par continuité.
Cela permet alors d'expliciter la somme cherchée.

Exercice 41 : [énoncé]

(a) On a

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$$

donc le rayon de convergence de la première série entière vaut 1.
Aussi

$$\sin\left(\mathrm{e}^{-n}\right)\sim\mathrm{e}^{-n}$$

donc le rayon de convergence de la deuxième série entière vaut e.

(b) On sait qu'une série entière converge normalement sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence, mais en revanche elle ne converge pas normalement sur ce disque. La série entière $\sum z^n$ est un contre-exemple car

$$R=1\text{ et }\left\|z\mapsto z^n\right\|_{\infty,D(0,1)}=1.$$

Exercice 42 : [énoncé]

Par intégration par parties successives

$$a_n=\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Puisque $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\to\frac{1}{4}$ on a $R=4$.
Pour $|x|<4$, par convergence normale

$$f(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1-t(1-t)x}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{xt^2-xt+1}.$$

Si $x\in\,]0\,;4[$,

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{x(4-x)}}\arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}}.$$

Si $x\in\,]-2\,;0[$,

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{x(x-4)}}\operatorname{argth}\sqrt{\frac{x}{x-4}}.$$

Si $x=0$, $f(x)=1$.

Exercice 43 : [énoncé]

La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son terme général est donné par

$$a_n=\alpha+n(\beta-\alpha).$$

Si $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ alors $R=1$.
Si $(\alpha,\beta)=(0,0)$ alors $R=+\infty$.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) Pour $r\in\,]0\,;R[$, la série numérique $\sum a_n r^n$ converge donc $a_n r^n\to 0$ et à partir d'un certain rang N, on a

$$|a_n|r^n\leq 1.$$

(b) On a alors

$$\frac{a_n z^n}{n!}=\mathrm{O}\left(\frac{z^n}{r^n n!}\right).$$

Posons

$$u_n(z) = \frac{z^n}{r^n n!}.$$

Pour $z \neq 0$, on a

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument.
Par comparaison, la série numérique $\sum a_n z^n/n!$ converge aussi absolument.
On peut donc la série entière $\sum a_n z^n/n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.

(c) On a

$$|S_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| + \frac{n-N}{r^n}$$

et donc $S_n = \mathrm{O}(n/r^n)$ puis

$$\frac{S_n z^n}{n!} = \mathrm{O}\left(\frac{z^n}{r^n (n-1)!}\right).$$

Comme ci-dessus, la série entière $\sum S_n z^n/n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 45 : [énoncé]

(a) Comme la suite (a_n) est bornée, on peut écrire $a_n x^n = \mathrm{O}(x^n)$. Or la série $\sum x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$ et donc, par comparaison, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.
Puisque $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{in\theta}\right)$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n\right).$$

Par sommation géométrique (possible puisque $\left|x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) = \frac{1 - x\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}.$$

(b) La convergence de la série étudiée n'est pas immédiate. Exprimons ses sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} \cos(n\theta) x^n \,\mathrm{d}x.$$

Par le calcul au dessus, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n \,\mathrm{d}x.$$

Puisque $\left|\mathrm{Re}(z)\right| \leq |z|$, on peut écrire

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n\right| \leq \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mathrm{e}^{in\theta} x^n\right|$$

ce qui donne par un calcul analogue au précédent

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n\right| \leq \frac{x^{N+1}}{\left|1 - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|} \leq \frac{x^{N+1}}{\left|\mathrm{Im}(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|} = \frac{x^N}{|\sin\theta|}.$$

Par conséquent

$$\left|\int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 \frac{x^N}{|\sin\theta|}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{(N+1)|\sin\theta|} \to 0.$$

On en déduit que la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x\cos\theta}{x - 2x\cos\theta + 1}\,\mathrm{d}x.$$

(c) On décompose l'intégrale étudiée en deux intégrales directement calculables

$$\int_0^1 \frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,\mathrm{d}x = \sin^2\theta \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{2} \int_0^1 \frac{2x - 2\cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$$

et l'on obtient

$$\int_0^1 \frac{1 - x\cos\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\,\mathrm{d}x = \sin\theta \left[\arctan\frac{x - \cos\theta}{\sin\theta}\right]_0^1 - \frac{\cos\theta}{2}\left[\ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)\right]_0^1.$$

On simplifie en exploitant

$$\arctan\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \arctan\left(\tan(\theta - \pi/2)\right) = \theta - \pi/2.$$

$$\arctan\left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right) = \arctan\frac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cos\theta/2} = \frac{\theta}{2}$$

et
$$\ln(2-2\cos\theta)=\ln\bigl(4\sin^2\theta/2\bigr).$$
On obtient au final
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n+1}=\frac{\pi-\theta}{2}\sin\theta-\cos\theta\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Exercice 46 : [énoncé]
g est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R=+\infty$, c'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et h l'est aussi par produit.
$h(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)$ avec
$$f_n(t)=\frac{(-1)^n t^n \mathrm{e}^{-t}}{2^{2n}(n!)!}$$
pour tout $t\in[0\,;+\infty[$
Les fonctions f_n sont continues par morceaux sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
Puisque
$$\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=n!$$
on obtient
$$\int_0^{+\infty}|f_n|=\frac{1}{2^{2n}n!}$$
et donc la série $\sum\int_{[0;+\infty[}|f_n|$ converge.
Puisque $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers h continue par morceaux, on peut par théorème affirmer que h est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et
$$\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!}=\mathrm{e}^{-1/4}.$$

Exercice 47 : [énoncé]
(a) La fonction définissant l'intégrale est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $t\mapsto 1/t^2$ en $+\infty$: elle est intégrable.
(b) Par intégration par parties généralisée justifiée par la convergence du crochet
$$T(a,b)=\left[\frac{t^a\mathrm{e}^{-bt}}{-b}\right]_0^{+\infty}+\frac{a}{b}\int_0^{+\infty}t^{a-1}\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{b}T(a-1,b).$$
On en déduit
$$T(a,b)=\frac{a!}{b^{a+1}}.$$
(c) On peut simplifier $S_{n-1}-S_n$
$$S_{n-1}-S_n=\int_0^{+\infty}t^p\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t=\frac{p!}{n^{p+1}}.$$
Par télescopage
$$S_0=\sum_{k=1}^n(S_{k-1}-S_k)+S_n=p!\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^{p+1}}+S_n.$$
(d) Par convergence dominée sachant
$$\left|\frac{t^p}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{e}^{-nt}\right|\leq\frac{t^p}{\mathrm{e}^t-1}=\varphi(t)\text{ avec }\varphi\text{ intégrable}$$
on obtient que la suite (S_n) converge vers 0.
(e) Il suffit de passer à la limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 48 : [énoncé]
(a) Posons
$$f(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{-xt}\sin t}{t}$$
définie sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x>0$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et intégrable car
$$f(x,t)\xrightarrow[t\to0^+]{}1\quad\text{et}\quad t^2f(x,t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$
La fonction f admet une dérivée partielle
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\mathrm{e}^{-xt}\sin(t).$$
Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b]\subset]0\,;+\infty[$. On a
$$\forall(x,t)\in[a\,;b]\times]0\,;+\infty[,\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\mathrm{e}^{-at}=\varphi(t).$$
La fonction φ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et
$$F'(x)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right)$$

on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(b) On en déduit

$$F(x) = -\arctan x + C^{te} \text{ sur }]0\,;+\infty[.$$

Montrons $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$. On a $|\sin t| \le t$ pour tout $t > 0$ et donc

$$\left|F(x)\right| \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

On conclut

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

(c)

Exercice 49 : [énoncé]

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Introduisons $u_n\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{1}{(1+x^3)^n}.$$

La fonction u_n est continue par morceaux et intégrable car

$$u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}} \quad \text{avec} \quad 3n > 1.$$

(b) La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers

$$u_\infty\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Les fonctions u_n et u_∞ sont continues par morceaux et, pour tout $n \ge 1$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{1}{(1+x^3)^n}\right| \le \frac{1}{1+x^3} = \varphi(x).$$

La fonction φ est intégrable et par convergence dominée

$$I_n = \int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} u_\infty(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(c) On remarque $0 \le u_{n+1}(x) \le u_n(x)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ et, par intégration en bon ordre, $0 \le I_{n+1} \le I_n$. On en déduit que la série $\sum(-1)^{n-1}I_n$ est alternée et que son terme général décroît en valeur absolue vers 0 : la série converge par application du critère spécial.

Pour tout $N \ge 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}I_n &= \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3}\left(\frac{1-\frac{(-1)^N}{(1+x^3)^N}}{1+\frac{1}{1+x^3}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\left(1+\frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{1}{2+x^3}\cdot\frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{N+1}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

car $2+x^3 \ge 1+x^3$ On en déduit

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}I_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{2+x^3}.$$

Pour calculer, cette dernière intégrale, on réalise le changement de variable $x = 2^{1/3}t$ puis la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1/3}{t+1} + \frac{-\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}}{t^2-t+1}.$$

Au terme des calculs

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}I_n = \frac{2^{1/3}\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 50 : [énoncé]

Pour $x \in [0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

et pour $x \in]0\,;1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(\ln x)^2.$$

Considérons alors la série des fonctions

$$u_n(x) = (-1)^n x^{2n} (\ln x)^2.$$

Par convergence des séries précédentes, la série des fonctions u_n converge simplement vers la fonction $x \mapsto (\ln x)^2/(1+x^2)$. Les fonctions u_n et la fonction somme sont continues par morceaux.
Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^1 \left|u_n(x)\right| \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Par intégration par parties, on montre

$$\int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^3}.$$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et affirmer

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 51 : [énoncé]
On définit $f\colon \mathbb{R} \times]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t} \cos(xt).$$

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t \to +\infty$, $t^2 f(x,t) \to 0$ et quand $t \to 0^+$, $f(x,t) \to b-a$ donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}) \sin(xt).$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$ et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-at} + \mathrm{e}^{-bt} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable.

On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{-bt} - \mathrm{e}^{-at}) \sin(xt) \,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ct} \sin(xt) \,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-c+\mathrm{i}x)t} \,\mathrm{d}t\right) = \frac{x}{c^2+x^2}$$

donc

$$F'(x) = \frac{x}{x^2+b^2} - \frac{x}{x^2+a^2}.$$

(c) On en déduit

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right) + C^{te}.$$

Pour déterminer la constante, on étudie la limite de F en $+\infty$. Posons

$$\psi(t) = \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}$$

ce qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable ainsi que sa dérivée sur $]0\,;+\infty[$.
Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) \cos(xt) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \left[\psi(t) \sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi'(t) \sin(xt) \,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \psi(t) \cos(xt) \,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \left|\psi'(t)\right| \mathrm{d}t \to 0.$$

On peut conclure

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2+b^2}{x^2+a^2}\right).$$

Exercice 52 : [énoncé]
Pour $x > 0$,

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \int_{]0;1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec
$$f_n(x)=\frac{(x\ln x)^n}{n!}.$$
Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Les fonctions f_n sont intégrables et
$$\int_{]0;1]}|f_n|=\int_{]0;1[}\frac{(-1)^n x^n(\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x.$$
Or
$$\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^n\right]_\varepsilon^1-\frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$
donc quand $\varepsilon\to 0$
$$\int_{]0;1]}x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x=-\frac{n}{n+1}\int_{]0;1]}x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$
Ainsi
$$\int_{]0;1]}x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$
Par suite
$$\int_0^1|f_n|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
et il y a convergence de la série $\sum\int_0^1|f_n|$
Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0;1]}x^x\,\mathrm{d}x$ est définie et
$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$
puis le résultat voulu.

Exercice 53 : [énoncé]

(a) La fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
En effet, pour $x\in\mathbb{R}$, la fonction $f\colon t\mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Puisque $t^2f(t)=t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, la fonction f est assurément intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
De plus, $f(t)\underset{t\to0^+}{\sim}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ si, et seulement si, $x-1>-1$ *i.e.* $x>0$.
Ainsi f est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $x>0$.
Enfin, la fonction f étant positive, l'intégrabilité équivaut à l'existence de l'intégrale.

(b) Par intégration par parties
$$I_n(x)=\left[\frac{t^x}{x}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n+\int_0^n\frac{t^x}{x}\frac{n}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t.$$
En répétant l'opération
$$I_n(x)=\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)n^n}\int_0^n t^{x+n-1}\,\mathrm{d}x$$
et finalement
$$I_n(x)=\frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

(c) Quand $n\to+\infty$
$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=\exp\Big(n\ln(1-\frac{t}{n})\Big)=\exp\left(n\left(-\frac{t}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\to\mathrm{e}^{-t}.$$
Considérons la suite des fonctions
$$f_n\colon t\mapsto\begin{cases}t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t\in\,]0\,;n[\\ 0 & \text{si } t\in[n\,;+\infty[.\end{cases}$$
Soit $t>0$ fixé. Pour n assez grand $t\in\,]0\,;n[$ et
$$f_n(t)=t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\to t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}.$$
La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f introduite dans la première question.
Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.
Enfin, pour $t\in\,]0\,;n[$, on a
$$\left|f_n(t)\right|=t^{x-1}\exp\big(n\ln(1-t/n)\big)\le t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}=f(t)$$
car il est connu $\ln(1+u)\le u$ pour tout $u>-1$. On a aussi $\left|f_n(t)\right|\le f(t)$ pour $t\in[n\,;+\infty[$ et donc
$$\forall t\in\,]0\,;n[,\left|f_n(t)\right|\le f(t).$$

La fonction f étant intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

on peut conclure

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 54 : [énoncé]
En découpant l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée aux deux intégrales, on obtient

$$I_n \to \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1.$$

Exercice 55 : [énoncé]
f_n est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $x\to 0^+$, $f_n(x)\to \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.
Quand $x\to+\infty$, $f_n(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Par suite f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} = nf_n(x).$$

Pour $x>0$, quand $n\to+\infty$, $g_n(x)\to\frac{1}{1+x^2}$.
De plus, sachant $\ln(1+u)\le u$, on a $\left|g_n(x)\right| \le \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable.
Par convergence dominée,

$$u_n \to \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 56 : [énoncé]

(a) (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x\in[a\,;1[\\ f(1)/2 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } x\in\,]1\,;b]. \end{cases}$$

(b) Sachant $\left|f_n(x)\right| \le \left|f(x)\right|$ avec f intégrable sur $[a\,;b]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient directement le résultat proposé.

(c) Par une intégration par parties

$$\int_a^1 t^{n-1}f_n(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n}\ln(1+t^n)f(t)\right]_a^1 - \frac{1}{n}\int_a^1 \ln(1+t^n)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'une part

$$\left[\frac{1}{n}\ln(1+t^n)f(t)\right]_a^1 = \frac{\ln 2}{n}f(1) + \frac{\ln(1+a^n)}{n}f(a) = \frac{\ln 2}{n}f(1) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

car $\ln(1+a^n)\to 0$.
D'autre part

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^1 \ln(1+t^n)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{n}\|f'\|_\infty \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

sachant $\ln(1+u)\le u$.
Au final, on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1}f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{n}f(1) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 57 : [énoncé]
Posons

$$f_n : t\mapsto \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}.$$

La fonction f_n est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Quand $t\to 0^+$, $f_n(t)\sim\frac{nt}{nt+t^2}\to 1$.
Quand $t\to+\infty$; $f_n(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On peut donc affirmer que f_n est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $t \in]0\,;+\infty[$.
Quand $n \to +\infty$, $f_n(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
De plus, pour $t \leq \pi/2$, on a, sachant $|\sin u| \leq |u|$,

$$\left|f_n(t)\right| \leq \frac{nt}{nt+t^2} \leq 1$$

et pour $t \geq \pi/2$,

$$\left|f_n(t)\right| \leq \frac{1}{nt+t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Ainsi $|f_n| \leq \varphi$ avec

$$\varphi\colon t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0\,;\pi/2] \\ 1/t^2 & \text{si } t \in]\pi/2\,;+\infty[. \end{cases}$$

La fonction φ étant intégrable sur $]0\,;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$u_n \to \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 58 : [énoncé]
L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

est bien définie.
Par le changement de variable $x = u/n$ bijectif de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u$$

avec

$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\chi_{[na;nb]}$$

h_n est continue par morceaux, (h_n) converge simplement vers h continue par morceaux avec

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}g(0).$$

Pour n assez grand de sorte que $|a/n|, |b/n| \leq 1$ on a pour tout $u \in [na\,;nb]$, $\left|u^2/2n^4\right| \leq 1/2 < 1$,

$$\left|h_n(u)\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{2n^4\ln(1-u^2/2n^4)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2} = \varphi(u)$$

et cette inégalité vaut aussi pour $u \notin [na\,;nb]$.
La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure sachant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 59 : [énoncé]

(a) Posons $f(x,t) = \frac{\ln t}{t+x}$.
f est définie et continue sur $]0\,;+\infty[\times]0\,;1]$.
Pour $x > 0$, $f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}\ln t$ donc $\sqrt{t}f(x,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ puis $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1]$.
Ainsi F est définie sur $]0\,;+\infty[$.
f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\ln t}{(t+x)^2}$.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$. Pour $x \in [a\,;b]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{|\ln t|}{a^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;1]$.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^1 -\frac{\ln t}{(t+x)^2}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Par intégration par parties,

$$F'(x) = \left[\ln t\left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}t$$

où la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t+x}$ est choisie de sorte de s'annuler en 0 pour que l'intégration par parties présente deux convergences.
Ainsi

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x(t+x)} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x}.$$

Par opérations

$$G'(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x} - \frac{\ln(1+1/x) + \ln x}{x} = -\frac{1}{x}\ln x$$

puis

$$G(x) = G(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Or $G(1) = 2F(1)$ avec

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\int_0^1 t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(k+1)^2}$ donc par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient $F(1) = -\frac{\pi^2}{12}$ puis

$$G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Par décomposition en éléments simples

$$\frac{t-1}{(t+1)(t^2+2t\operatorname{ch}\theta+1)} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}}{t+1} - \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}(t+\operatorname{ch}\theta)}{t^2+2t\operatorname{ch}\theta+1}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1}\frac{\ln t}{t^2+2t\operatorname{ch}(\theta)+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\operatorname{ch}\theta-1}\left(F(1) - \frac{1}{2}G(\mathrm{e}^\theta)\right) = \frac{\theta^2}{4(\operatorname{ch}(\theta)-1)}.$$

Exercice 60 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $\mathrm{O}(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}_+$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est définie sur $[0\,;+\infty[\times]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0\,;+\infty[$.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0\,;+\infty[$,
donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

(b) Pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)$$

d'où

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

ce qui est encore valable en 1 par continuité.
Par suite

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1) + C$$

avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.

Exercice 61 : [énoncé]

(a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^x)^n}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Cas $x < 0$:
$\frac{1}{(1+t^x)^n} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$ donc la fonction n'est pas intégrable.
Cas $x = 0$:
$\frac{1}{(1+t^x)^n} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{2}$. Même conclusion.
Cas $x > 0$:
Quand $t \to 0^+$, $\frac{1}{(1+t^x)^n} \to 1$ et quand $t \to +\infty$, $\frac{1}{(1+t^x)^n} \sim \frac{1}{t^{nx}}$ donc la fonction est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $nx > 1$.

(b) Pour $t > 0$, on remarque que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^x)^n} = \frac{1}{t^x}.$$

Par l'absurde, si $\sum I_n(x)$ converge, on peut appliquer un théorème d'interversion somme et intégrale assurant que $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$. C'est absurde.
On conclut que $\sum I_n(x)$ diverge.
Par intégration par parties avec deux convergences

$$I_n(2) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$I_n(2) - I_{n+1}(2) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$$

donc

$$I_{n+1}(2) = \frac{2n-1}{2n} I_n(2).$$

On en déduit

$$I_{n+1}(2) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

car $I_1(2) = \pi/2$.
Notons que par le changement de variable $t = \tan u$, on pouvait aussi transformer $I_n(2)$ en une intégrale de Wallis.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) $f_{p,k}$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Quand $x \mapsto 0^+$, $\sqrt{x} f_{p,k}(x) = x^{p+1/2}(\ln x)^k \to 0$ donc $f_{p,k}(x) = \mathrm{o}\big(1/\sqrt{x}\big)$.
Par suite $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0\,;1]$.

(b) Par intégration par parties

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} K_{p,k-1}.$$

(c)

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k} K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

et donc

$$J_n = K_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

(d) $x^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!}$ pour tout $x \in\,]0\,;1]$.
Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n!}(x\ln x)^n$.
Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0\,;1]$.
La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ et sa somme, qui est $x \mapsto x^x$, est continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Enfin

$$\int_0^1 \left|f_n(x)\right| \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

est terme général d'une série convergente.
Par théorème d'intégration terme à terme, $x \mapsto x^x$ est intégrable sur $]0\,;1]$ et

$$I = \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 63 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(t) = 1/(1+t^3)^n$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0\,;+\infty[$, elle-même continue par morceaux. De plus

$$\forall n \geq 1, \forall t \in\,]0\,;+\infty[, \left|u_n(t)\right| \leq \varphi(t)$$

avec $\varphi : t \mapsto 1/(1+t^3)$ intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et donc aussi sur $]0\,;+\infty[$.
Par application du théorème de convergence dominée sur $]0\,;1]$ et sur $[1\,;+\infty[$, on obtient

$$U_n \to 0 \text{ et } V_n \to 0.$$

(b) Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction U continue par morceaux donnée par

$$U(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{1+t^3}\frac{1}{1-\frac{1}{1+t^3}} = \frac{1}{t^3}.$$

Si, par l'absurde, la série $\sum U_n$ converge, on est dans la situation où la série de terme général $\int_{]0;1]}\left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t$ converge et l'on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme affirmant :

$$U \text{ est intégrable sur }]0\,;1] \text{ et } \int_{]0;1]} U(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or ceci est absurde car la fonction U n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$!

On en déduit que la série $\sum U_n$ diverge.
En revanche, la série $\sum V_n$ est à termes positifs et

$$\sum_{k=1}^{n} V_k \leq \int_1^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+t^3)^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum V_n$ étant majorées, on peut affirmer que la série $\sum V_n$ converge.

Exercice 64 : [énoncé]

(a) Quand $x \to 0^+$, $f_n(x) \sim \frac{2x}{nx} \to \frac{2}{n}$ donc $\alpha = \frac{2}{n}$ est l'unique valeur pour laquelle f est continue en 0.

(b) f_n est continue sur $[0\,;+\infty[$ et quand $x \to +\infty$, $f_n(x) \sim \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{nx}} \to 0$ donc f_n est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
On peut envisager une argumentation plus détaillée :
- puisque f converge en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que f est bornée sur $[A\,;+\infty[$;
- puisque f est continue, f est bornée sur $[0\,;A]$;
- et finalement f est bornée sur la réunion de ces deux intervalles par la plus grande des deux bornes.

(c) f_n est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ et quand $x \to +\infty$,
$x^2 f_n(x) \sim x^2\mathrm{e}^{-(n-1)x} \to 0$ donc $f_n(x) = \mathrm{o}\big(1/x^2\big)$ et donc f est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

(d) Pour $x > 0$,

$$\frac{2\operatorname{sh} x}{\mathrm{e}^{nx}-1} = 2\operatorname{sh} x \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nkx} = \sum_{k=1}^{+\infty}\big(\mathrm{e}^{-(nk-1)x} - \mathrm{e}^{-(nk+1)x}\big).$$

$$\int_0^{+\infty} \big|\mathrm{e}^{-(nk-1)x} - \mathrm{e}^{-(nk+1)x}\big|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1} = \frac{2}{n^2k^2-1} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut sommer terme à terme et affirmer

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\operatorname{sh} x}{\mathrm{e}^{nx}-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\big(\mathrm{e}^{-(nk-1)x} - \mathrm{e}^{-(nk+1)x}\big)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1}.$$

Pour $n = 2$, la somme est facile à calculer.

Exercice 65 : [énoncé]
Supposons f solution.

$$f(x) = -1 - 2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a $f(0) = -1$ et f dérivable avec

$$f'(x) = -2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 2xf(x) + xf(x).$$

Par suite $y\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$. Ceci détermine y et donc f de manière unique.
En recherchant les solutions développables en séries entières, on obtient $y(x) = -x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ puis

$$f(x) = (x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) On peut écrire

$$f(x) = 1 - x - x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par opération sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Soit f solution. f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = -1 - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

Ainsi la fonction f est de la forme

$$f(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x.$$

De plus, on observe $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ ce qui détermine λ et μ :

$$\lambda = 1 \text{ et } \mu = -1.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $x \mapsto \cos x - \sin x$ est solution, soit en remontant les calculs (ce qui est possible) soit en refaisant ceux-ci.

Exercice 67 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire de solution générale homogène

$$y(x) = \frac{\lambda}{\cos x}.$$

L'application de la méthode de la variation de la constante amène à déterminer

$$\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x = \int \cos x \,\mathrm{d}x - \int \cos x \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

Au final, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + \lambda}{\cos x}.$$

Exercice 68 : [énoncé]
Soient $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme.
Posons $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie de sorte que $y(u) = x(t)$ *i.e.* $y(u) = x(\varphi^{-1}(u))$.
La fonction y est deux fois dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = y(\varphi(t))$.
On a alors $x'(t) = \varphi'(t)y'(\varphi(t))$ et $x''(t) = \left(\varphi'(t)\right)^2 y''(\varphi(t)) + \varphi''(t)y'(\varphi(t))$.
Par suite

$$(1+t^2)x''(t)+tx'(t)+a^2x(t) = (1+t^2)\varphi'(t)^2y''(\varphi(t))+\left((1+t^2)\varphi''(t)+t\varphi'(t)\right)y'(\varphi(t))+a^2y(\varphi(t)).$$

Pour $\varphi(t) = \operatorname{argsh} t$, $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $(1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t) = 0$ de sorte que

$$(1+t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t) = 0 \iff y''(\varphi(t)) + a^2y(\varphi(t)) = 0.$$

Cela nous amène à résoudre l'équation

$$y''(u) + a^2y(u) = 0.$$

Si $a \neq 0$, la solution générale de $y''(u) + a^2y(u) = 0$ est
$y(u) = \lambda\cos(au) + \mu\sin(au)$ et la solution générale de $(1+t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$ est

$$x(t) = \lambda\cos(a \operatorname{argsh} t) + \mu\sin(a \operatorname{argsh} t) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $a = 0$, on parvient à

$$x(t) = \lambda + \mu \operatorname{argsh} t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 69 : [énoncé]
$P = (x+1)X - 1$ convient.

$$(E) \iff (x+1)z' - z = (3x+2)\mathrm{e}^{3x}.$$

Après résolution avec recollement la solution générale de cette dernière équation est $z(x) = \lambda(x+1) + \mathrm{e}^{3x}$.

$$(E) \iff y' - 3y = \lambda(x+1) + \mathrm{e}^{3x}.$$

La solution générale est

$$y(x) = \lambda'(3x+4) + \mu\mathrm{e}^{3x} + x\mathrm{e}^{3x}.$$

Exercice 70 : [énoncé]
(a) Par analyse synthèse, on obtient

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}x^n$$

de rayon de convergence $R = +\infty$.

(b) $h(0) = 1$ et h est continue sur $[0\,;2]$. Il suffit d'établir $h(2) < 0$ pour pouvoir conclure.
On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}2^n$$

(on commence au rang 1 pour avoir la décroissance). On obtient alors

$$-2 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}2^n < -1$$

car la somme peut être encadrée par des sommes partielles consécutives. On en déduit $h(2) < 0$.

(c) La fonction h est dérivable et

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!}x^{n-1}.$$

On peut à nouveau appliquer le critère spécial des séries alternées à cette série pour tout $x \in \left]0\,;2\right[$ et on en déduit $h'(x) < 0$.

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Puisque de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, la matrice A est diagonalisable et son polynôme minimal est

$$\Pi_A = (X+2)(X-1)(X-3).$$

La division euclidienne de X^n par Π_A s'écrit

$$X^n = \Pi_A Q + R \text{ avec } \deg R < 3.$$

Le polynôme R peut s'écrire

$$R(X) = a(X-1)(X-3) + b(X-3) + c$$

et l'évaluation de la relation division euclidienne en -2, 1 et 3 donne

$$\begin{cases} 15a - 5b + c = (-2)^n \\ 2b + c = 1 \\ c = 3^n \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} \\ b = \frac{3^n - 1}{2} \\ c = 3^n \end{cases}$$

et enfin

$$R(X) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} X^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30} X + -\frac{3^n - (-2)^n - 5}{5}.$$

En évaluant la relation de division euclidienne en A, on obtient

$$A^n = R(A) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} A^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30} A + \frac{-3^n + (-2)^n + 5}{5} I_3.$$

(b) En vertu de ce qui précède

$$\operatorname{ch} A = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{30}\left(3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{(2n!)} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\right)$$

et donc

$$\alpha = \frac{3\operatorname{ch} 3 + 2\operatorname{ch} 2 - 5\operatorname{ch} 1}{30}.$$

De même, on obtient

$$\beta = \frac{3\operatorname{ch} 3 - 8\operatorname{ch} 2 + 5\operatorname{ch} 1}{30} \text{ et } \gamma = \frac{5\operatorname{ch} 1 + \operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 3}{5}.$$

Exercice 72 : [énoncé]

(a) $\vec{\gamma}_2$ paramètre le quart d'une ellipse partant du sommet $A(a,0)$ jusqu'au sommet $B(0,b)$.
$\vec{\gamma}_1$ paramètre le segment $[A\,;B]$ de A vers B.

(b) Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive du potentiel U si, et seulement si,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = y \text{ et } \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 2x.$$

Un tel potentiel est alors de classe $\mathcal{C}^2$ et l'égalité de Schwarz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

n'étant pas vérifiée, on peut conclure à l'inexistence de U.

(c) La circulation de $\vec{V}$ le long de $\vec{\gamma}_1$ est

$$\int_0^1 -abt + 2ab(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}$$

et celle le long de $\vec{\gamma}_2$ est

$$\int_0^{\pi/2} -ab\sin^2(s) + 2ab\cos^2(s)\,\mathrm{d}s = \frac{ab\pi}{4}.$$

Par la différence des deux valeurs obtenues, on retrouve que $\vec{V}$ ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 73 : [énoncé]

(a) f est définie sur $]0\,;+\infty[$, strictement croissante, concave sur $]0\,;2]$ et convexe sur $[2\,;+\infty[$. Asymptote verticale en 0 et branche parabolique de direction $y = x$ en $+\infty$.

(b) $t = 1$ est solution et c'est la seule car f est strictement croissante.

(c) g est de classe $\mathcal{C}^1$. Recherchons, ses points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln y - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = \mathrm{e}. \end{cases}$$

On conclut que (e,e) est le seul point critique.

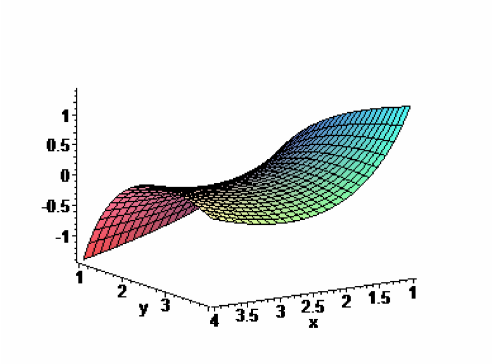

Figure 2 – Une représentation de la fonction g

On étudie alors le signe de

$$d(x,y) = g(x,y) - g(\mathrm{e},\mathrm{e}) = x\ln y - y\ln x.$$

On procède à une translation

$$\begin{cases} x = \mathrm{e} + u \\ y = \mathrm{e} + v \end{cases}$$

et à développement limité à l'ordre 2

$$d(x,y) = (\mathrm{e}+u)\left(1 + \frac{v}{\mathrm{e}} - \frac{v^2}{2\mathrm{e}} + v^2\varepsilon(v)\right) - (\mathrm{e}+v)\left(1 + \frac{u}{\mathrm{e}} - \frac{u^2}{2\mathrm{e}} + u^2\varepsilon(u)\right)$$

avec $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$. Après simplification

$$d(x,y) = \frac{u^2 - v^2}{2} + (u^2+v^2)\tilde{\varepsilon}(u,v)$$

avec $\tilde{\varepsilon} \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.
En considérant $u = 1/n$ et $v = 0$ ou, à l'inverse $u = 0$ et $v = 1/n$, on obtient que d prend des signes différents au voisinage de (e,e) qui n'est donc pas extremum de f.