**Exercice 1** [ 02598 ] [Correction]
Soient $A$ et $B$ deux matrices réelles carrées d'ordre $n$ telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 et vérifiant

$$P(0) = 1 \text{ et } AB = P(A).$$

Montrer que $A$ est inversible et que $A$ et $B$ commutent.

**Exercice 2** [ 02493 ] [Correction]
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}^*$, tous distincts et $P(x) = \det(A + xI_n)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_n \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $P(a_i)$ et décomposer en éléments simples la fraction

$$\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)}.$$

(b) En déduire $\det A$.

**Exercice 3** [ 02524 ] [Correction]
Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = A^p$.
Montrer que $A$ est diagonalisable si, et seulement si, $B$ l'est.

**Exercice 4** [ 02595 ] [Correction]
Soient $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Calculer $N^2$, la matrice $N$ est-elle diagonalisable ?
Montrer que $M = 2N + I_n$ est inversible et calculer $M^{-1}$.

**Exercice 5** [ 03795 ] [Correction]
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie la propriété $(P)$ si

$$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(M + \lambda A) \neq 0.$$

(a) Rappeler pourquoi une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

(b) Soit $T$ une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.
Calculer $\det(I_n + \lambda T)$. En déduire que $T$ vérifie la propriété $(P)$

(c) Déterminer le rang de la matrice

$$T_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

(d) Soient $A$ vérifiant $(P)$ et $B$ une matrice de même rang que $A$ ; montrer

$$\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2, B = PAQ$$

et en déduire que $B$ vérifie $(P)$.

(e) Conclure que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices non inversibles vérifient $(P)$ et que ce sont les seules.

(f) Que dire des cette propriété dans le cas $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on distinguera $n$ pair et $n$ impair) ?

**Exercice 6** [ 03191 ] [Correction]

(a) Montrer que si $P$ est un polynôme annulateur d'un endomorphisme $f$ alors $P(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre $\lambda$ de $f$.

(b) Montrer que si $f$ vérifie

$$f^3 + 2f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$$

alors $f$ est bijectif.

**Exercice 7** [ 03583 ] [Correction]
Trigonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

**Exercice 8** [ 02577 ] [Correction]

(a) Montrer que $\Phi$, qui à $P$ associe

$$(X^2-1)P'(X)-(4X+1)P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(b) Résoudre l'équation différentielle

$$y'=\left(\frac{5-\lambda}{2(x-1)}+\frac{3+\lambda}{2(x+1)}\right)y.$$

(c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de $\Phi$.

**Exercice 9** [ 03187 ] [Correction]

(a) Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $a$ est valeur propre de $f$, de multiplicité $m$, et si $E(f,a)$ est le sous-espace propre attaché, montrer

$$1\leq \dim E(f,a)\leq m.$$

(b) Soit

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\\4&4&4&4\end{pmatrix}.$$

Déterminer simplement les valeurs propres de $A$.
La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 10** [ 03582 ] [Correction]

Soit $A,B$ fixés dans $\mathbb{R}_n[X]$.
On note $f$ l'application qui, à $P\in\mathbb{R}_n[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $AP$ par $B$.

(a) Montrer que $f$ est un endomorphisme ; est-ce un isomorphisme ?

(b) On suppose dans la suite que les polynômes $A$ et $B$ premiers entre eux avec $B$ scindé à racines simples ; donner les valeurs propres de $f$.

(c) L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**Exercice 11** [ 02526 ] [Correction]

Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix}13&-5&-2\\-2&7&-8\\-5&4&7\end{pmatrix}$$

est trigonalisable et préciser une matrice de passage.

**Exercice 12** [ 00042 ] [Correction]

Soient $u$, $v$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel.

(a) Si $\lambda\neq 0$ est valeur propre de $u\circ v$, montrer qu'il l'est aussi de $v\circ u$.

(b) Pour $P\in E=\mathbb{R}[X]$, on pose

$$u(P)=P' \text{ et } v(P)=\int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui définit des endomorphismes de $E$. Déterminer

$$\operatorname{Ker}(u\circ v) \text{ et } \operatorname{Ker}(v\circ u).$$

(c) Montrer que la propriété de la première question reste valable pour $\lambda=0$ si l'espace $E$ est de dimension finie.

**Exercice 13** [ 03693 ] [Correction]

Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix}0&-b&a\\b&0&-c\\-a&c&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ?

(b) $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ?

(c) Soit $\lambda$ un réel non nul ; la matrice $B=A+\lambda I_3$ est-elle inversible ?

(d) Montrer qu'il existe trois réels $\alpha,\beta,\gamma$ tels que

$$B^{-1}=\alpha A^2+\beta A+\gamma I_3.$$

**Exercice 14** [ 02511 ] [Correction]

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\geq 2$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(a) Montrer que $\phi(P)(X) = (X-a)\big(P'(X) - P'(a)\big) - 2(P(X) - P(a))$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) À l'aide de la formule de Taylor, déterminer l'image et le noyau de $\phi$.

(c) Trouver ses éléments propres. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

**Exercice 15** [ 03299 ] [Correction]
Soient $n \geq 2$, $A$ et $B$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminants non nuls et premiers entre eux.
Montrer qu'il existe $U$ et $V$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que

$$UA + VB = \mathrm{I}_n$$

(on pourra écrire $\chi_A(X) = XQ_A(X) \pm \det A$)
On donnera un exemple pour $n = 2$.

**Exercice 16** [ 03767 ] [Correction]
Considérons la matrice $A$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

(a) On suppose $k$ réel, la matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ? (sans calculs) ;

(b) Déterminer le rang de $A$.

(c) Donner la raison pour laquelle le polynôme caractéristique de $A$ est de la forme

$$X^2(X-u_1)(X-u_2)$$

avec $u_1$, $u_2$ appartenant à $\mathbb{C}^*$ et vérifiant

$$u_1 + u_2 = k \text{ et } u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6.$$

(d) Étudier les éléments propres dans le cas où $u_1 = u_2$.

(e) En déduire les valeurs de $k$ pour que $A$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

**Exercice 17** [ 03433 ] [Correction]
Pour quelle(s) valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la matrice suivante n'est-elle pas diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} -2-x & 5+x & x \\ x & -2-x & -x \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 18** [ 03776 ] [Correction]
Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.
On considère l'endomorphisme $f$ de $E$ déterminé par

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, f(e_k) = e_k + \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

(a) Donner la matrice de $f$ dans $e$.

(b) Déterminer les sous-espaces propres de $f$.

(c) L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

(d) Calculer le déterminant de $f$. L'endomorphisme $f$ est-il inversible ?

**Exercice 19** [ 02543 ] [Correction]
Expliquer brièvement pourquoi

$$^t\mathrm{Com}(A)A = \det(A)\mathrm{I}_n.$$

On suppose que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes ; que vaut $\det(A)$ ?
Que représente un vecteur propre de $A$ pour ${}^t\mathrm{Com}(A)$ ?
On suppose de plus que $A$ n'est pas inversible. Déterminer

$$\dim \operatorname{Ker} {}^t\mathrm{Com}(A).$$

Prouver que ${}^t\mathrm{Com}(A)$ n'admet que deux valeurs propres, les expliciter.

**Exercice 20** [ 03809 ] [Correction]

(a) Déterminer l'ensemble $\Omega$ des réels $a$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

(b) Pour $a \in \Omega$, trouver $P$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

**Exercice 21** [ 03450 ] [Correction]
On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $E$, $u$ un endomorphisme de $E$, $U = (u_{i,j})$ la matrice de $u$ dans une base de $E$, $e_{i,j}$ les projecteurs associés à cette base et $E_{i,j}$ la matrice de ces projecteurs.
On considère $\varphi$ l'endomorphisme dans $\mathcal{L}(E)$ tel que

$$\varphi(v) = u \circ v.$$

(a) Montrer que $\varphi$ et $u$ ont les mêmes valeurs propres.
(b) Calculer $UE_{i,j}$ en fonction des $E_{k,j}$. En déduire qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ dans laquelle la matrice de $\varphi$ est diagonale par blocs.
(c) Exprimer cette matrice.

**Exercice 22** [ 03810 ] [Correction]

(a) Trouver les valeurs propres des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer alors les matrices $M$ solutions à l'aide de polynômes annulateurs appropriés.

**Exercice 23** [ 02536 ] [Correction]
Soient $a, b, c, d$ quatre nombres complexes avec $a^2 + b^2 \neq 0$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $A^tA$, $\det A$ et montrer que $\operatorname{rg}(A) = 2$ ou 4.
(b) On pose $\alpha^2 = b^2 + c^2 + d^2$ supposé non nul. Montrer que $A$ est diagonalisable.

**Exercice 24** [ 03205 ] [Correction]
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant

$$u^3 + u = 0.$$

(a) Montrer que l'espace $\operatorname{Im} u$ est stable par $u$.
(b) Pour $x \in \operatorname{Im} u$, calculer $u^2(x)$
(c) Soit $v$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $\operatorname{Im} u$.
Montrer que $v$ est un isomorphisme.
(d) En déduire que le rang de l'endomorphisme $u$ est un entier pair.

**Exercice 25** [ 02522 ] [Correction]
Soit $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$.

(a) Quel est le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} ?.$$

(b) Avec la trace, que peut-on dire des valeurs propres ?
(c) $A$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 26** [ 02502 ] [Correction]
Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables vérifiant

$$u^3 = v^3.$$

Montrer que $u = v$.

**Exercice 27** [ 02521 ] [Correction]
Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $A * B \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ par

$$A * B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que si $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $(A * B)(A' * B') = (AA') * (BB')$.
(b) En déduire que $A * B$ est inversible si, et seulement si, $A$ et $B$ sont inversibles.
(c) Déterminer le spectre de $A * B$.
En déduire le polynôme caractéristique, la trace et le déterminant de $A * B$.

**Exercice 28** [ 03192 ] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que $\det A = 1$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel

$$A^p = \mathrm{I}_2.$$

(a) Montrer que $A$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

On note $\alpha$ et $\beta$ les deux valeurs propres de $A$.

(b) Montrer que $|\alpha| = |\beta| = 1$, que $\alpha = \overline{\beta}$ et

$$\left|\mathrm{Re}(\alpha)\right| \in \{0, 1/2, 1\}.$$

(c) Montrer que $A^{12} = \mathrm{I}_2$

(d) Montrer que l'ensemble $G = \left\{A^n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est un groupe monogène fini pour le produit matriciel.

**Exercice 29** [ 02501 ] [Correction]
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ ayant 0 comme racine simple et tel que $P(u) = 0$.

(a) Montrer

$$\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u \text{ et } \operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u.$$

(b) En déduire

$$E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u.$$

**Exercice 30** [ 03056 ] [Correction]
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$, $\lambda \neq \mu$ et $A, B, M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que

$$\begin{cases} \mathrm{I}_p = A + B \\ M = \lambda A + \mu B \\ M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B. \end{cases}$$

(a) Montrer que $M$ est inversible et exprimer $M^{-1}$.
On pourra calculer $M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu I_p$

(b) Montrer que $A$ et $B$ sont des projecteurs.

(c) La matrice $M$ est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

**Exercice 31** [ 02410 ] [Correction]
Soient $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$$

où tr désigne la forme linéaire trace.
Étudier la réduction de l'endomorphisme $f$ et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

**Exercice 32** [ 02513 ] [Correction]
Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie tel qu'il existe deux réels non nuls distincts $a$ et $b$ vérifiant

$$(u - a\mathrm{Id})(u - b\mathrm{Id}) = 0.$$

Soient

$$p = \frac{1}{b-a}(u - a\mathrm{Id}) \text{ et } q = \frac{1}{a-b}(u - b\mathrm{Id}).$$

(a) Calculer $p + q$, $p \circ p$, $q \circ q$ et $q \circ p$.

(b) Montrer que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q$.

(c) Trouver les éléments propres de $u$. L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ?

**Exercice 33** [ 00083 ] [Correction]
Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, $a$ un vecteur unitaire de $E$ et $k$ un réel avec $k \neq -1$.

(a) Montrer que

$$f(x) = x + k(x \mid a)a$$

définit un endomorphisme symétrique de $E$.

(b) Montrer que $f$ est un automorphisme.

(c) Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f$.

**Exercice 34** [ 03692 ] [Correction]
Soit $p$ un entier naturel impair et $u$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $n$.

(a) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme symétrique $v$ tel que $v^p = u$.

(b) Que se passe-t-il si $p$ est pair ?

(c) Si $p$ est pair et $u$ à valeurs propres positives ?

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(d) Si $p$ est pair et $u$ et $v$ à valeurs propres positifs ?

**Exercice 35** [ 03618 ] [Correction]
Soit $f$ un endomorphisme bijectif d'un espace euclidien $E$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in E^2, (f(x)\,|\,y) = -(x\,|\,f(y)).$$

(a) Montrer que pour tout vecteur $x$ de $E$, les vecteurs $x$ et $f(x)$ sont orthogonaux.

(b) Montrer que l'endomorphisme $s = f\circ f$ est symétrique.
Soit $a$ l'une de ses valeurs propres et $V_a$ le sous-espace propre associé.

(c) Soit $x \in V_a \setminus \{0_E\}$. Montrer que

$$(s(x)\,|\,x) = a\|x\|^2 = -\left\|f(x)\right\|^2$$

et en déduire que $a < 0$.

(d) On considère toujours $x \in V_a \setminus \{0_E\}$
Montrer que $F = \mathrm{Vect}(x, f(x))$ et $F^\perp$ sont stables par $f$.
Montrer que l'endomorphisme induit sur $F$ par $f$ a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -b\\ b & 0\end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée (on précisera $b$)

(e) Conclure que la dimension de $E$ est paire.

**Exercice 36** [ 02552 ] [Correction]
On note $E$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire est noté $(\cdot\,|\,\cdot)$.
On dit qu'une application $f\colon E\to E$ est antisymétrique si

$$\forall x,y\in E, (x\,|\,f(y)) = -(f(x)\,|\,y).$$

(a) Montrer qu'une application antisymétrique de $E$ est linéaire.
Que dire de sa matrice dans la base canonique de $E$ ?

(b) Montrer que l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension.

**Exercice 37** [ 03190 ] [Correction]
Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (i,j,k)$. Soit $\theta\in\mathbb{R}$, déterminer les éléments caractéristiques de

$$\mathrm{Rot}_{k,\pi/2}\circ \mathrm{Rot}_{\cos\theta i+\sin\theta j,\pi}\,.$$

**Exercice 38** [ 02554 ] [Correction]
Soient $u$ une isométrie de $E$ euclidien et $v = u - \mathrm{Id}_E$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$.

(b) Soit

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k.$$

Montrer que $\left(u_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pour tout vecteur $x$, vers le projeté orthogonal de $x$ sur $\operatorname{Ker} v$.

**Exercice 39** [ 03379 ] [Correction]
Soit $u$ un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien $E$ de dimension $n$.

(a) On pose $v = u - \mathrm{Id}$. Montrer

$$\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp.$$

(b) Soit $x\in E$. Justifier l'existence de $(x_1, y)\in \operatorname{Ker} v\times E$ tel que

$$x = x_1 + v(y).$$

Montrer

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x) = x_1 + \frac{1}{N}(u^N(y) - y).$$

(c) On note $p$ la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker} v$. Montrer

$$\forall x\in E, \lim_{N\to+\infty}\left\|p(x) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x)\right\| = 0.$$

**Exercice 40** [ 03591 ] [Correction]
Soient $a\in\mathbb{R}^*$, $u$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ euclidien.

(a) Montrer que l'application $f_a$ définie par

$$f_a(x) = x + a\langle x, u\rangle u$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer qu'il existe un unique $a' \neq 0$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \left\|f_{a'}(x)\right\| = \|x\|.$$

Donner la nature de $f_{a'}$ (on pourra s'intéresser à $f_{a'}^2$).

(c) Montrer que $f_a$ est un endomorphisme symétrique et déterminer ses éléments propres.

**Exercice 41** [ 03398 ] [Correction]
Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable et trouver $P$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

**Exercice 42** [ 02413 ] [Correction]
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Justifiez que la matrice $A$ est diagonalisable.

(b) Déterminer $P$ et $D$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP = P^{-1}$, $D$ est diagonale et ${}^tPAP = D$.

# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]
On peut écrire
$$AB = P(A) = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + I_n$$
donc
$$A\big(B - (\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n)\big) = I_n.$$
Par le théorème d'inversibilité, $A$ est inversible et
$A^{-1} = B - (\alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I_n)$.
Puisque $A$ commute avec $A^{-1}$ et ses puissances, on en déduit que $A$ commute avec
$$B = A^{-1} + \alpha_n A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 I.$$

**Exercice 2 :** [énoncé]

(a) On obtient
$$P(a_i) = a_i \prod_{j\neq i} (a_i - a_j)$$
$P$ est de degré $n$ et unitaire donc
$$\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x - a_i}.$$

(b) On en déduit
$$\det A = P(0) = (-1)^{n-1}(n-1)\prod_{i=1}^n a_i.$$
Notons que l'on peut proposer une démarche plus simple en commençant par factoriser les $a_i$ par colonnes.

**Exercice 3 :** [énoncé]
Si $A$ est diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $P$ inversible et $D$ diagonale. On a alors $B = A^p = P^{-1}D^pP$ avec $D^p$ diagonale et donc $B$ est diagonalisable.
Inversement, si $B$ est diagonalisable alors il existe un polynôme annulateur de $B$ scindé à racines simple de la forme
$$\prod_{k=1}^m (X - \lambda_k).$$
De plus, puisque $B$ est inversible, on peut supposer les $\lambda_k$ tous non nuls.
Sachant $B = A^p$, le polynôme
$$\prod_{k=1}^m (X^p - \lambda_k)$$
est annulateur de $A$. Or ce dernier est scindé à racines simples car
- les facteurs $X^p - \lambda_k$ et $X^p - \lambda_\ell$ (avec $k \neq \ell$) ont des racines deux à deux distinctes ;
- les racines de $X^p - \lambda_k$ sont toutes simples (car $\lambda_k \neq 0$).
On en déduit que $A$ est diagonalisable.

**Exercice 4 :** [énoncé]
On obtient $N^2 = sN$ avec $s = a_1 + \cdots + a_n$.
Puisque $s > 0$, $N$ annule un polynôme scindé simple et donc est diagonalisable.
$-1/2$ n'est pas valeur propre de $N$ car n'est pas racine du polynôme annulateur $X^2 - sX$ donc $M$ est inversible. En recherchant $M^{-1}$ de la forme $xM + yI_n$, on obtient
$$M^{-1} = I_n - (2+s)N.$$

**Exercice 5 :** [énoncé]

(a) Le polynôme caractéristique d'une matrice complexe possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

(b) $\det(I_n + \lambda T) = 1 \neq 0$ et donc $T$ vérifie $(P)$.

(c) $\operatorname{rg} T_r = r$.

(d) Les matrices $A$ et $B$ étant de même rang, elles sont équivalentes et donc il existe $P, Q$ inversibles vérifiant $A = PBQ$. Puisqu'il existe une matrice $M$ telle que $\det(M + \lambda A) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a
$$\det(PMQ + \lambda B) = \det P \det(M + \lambda A) \det Q \neq 0$$
et donc $B$ vérifie la propriété $(P)$.

(e) Si une matrice est non inversible, elle est de même rang qu'une matrice $T_r$ avec $r < n$ et comme cette dernière vérifie $(P)$, on peut conclure qu'une matrice non inversible vérifie $(P)$.
Inversement, si $A$ est une matrice inversible alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$$\det(M + \lambda A) = \det(A)\det(MA^{-1} + \lambda I_n)$$
et puisque la matrice $MA^{-1}$ admet une valeur propre, il est impossible que $\det(M + \lambda A)$ soit non nul pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(f) Si $n$ est impair alors toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une valeur propre (car le polynôme caractéristique réel est de degré impair). On peut alors conclure comme au dessus.
Si $n$ est pair, la propriété précédente n'est plus vraie. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et vérifie la propriété $(P)$ avec $M = I_n$.

**Exercice 6 :** [énoncé]

(a) Soit $x$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$. On a $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0_E$. Par composition $f^n(x) = \lambda^n x$ puis $P(f)(x) = P(\lambda)x$. Or $P(f)(x) = 0_E$ et $x \neq 0_E$ donc $P(\lambda) = 0$.

(b) Le polynôme $X^3 + 2X^2 - X - 2$ est annulateur de $f$ et 0 n'en est pas racine donc $0 \notin \operatorname{Sp} f$. Cela suffit pour conclure si l'espace est de dimension finie.
Sinon, on exploite

$$f \circ \left(\frac{1}{2}(f^2 + 2f - \mathrm{Id})\right) = \left(\frac{1}{2}(f^2 + 2f - \mathrm{Id})\right) \circ f = \mathrm{Id}_E$$

pour conclure.

**Exercice 7 :** [énoncé]

Le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = (X-1)^3$ est scindé donc $A$ est trigonalisable.
On a

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

et puisque

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8 :** [énoncé]

(a) L'application $\Phi$ est évidemment linéaire, il reste à voir qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$.
Pour un polynôme $P$ de degré inférieur à 4, le polynôme $(X^2-1)P'(X) - (4X+1)P(X)$ est de degré inférieur à 5 et, si $a$ est le coefficient de $X^4$ dans $P$, le coefficient de $X^5$ dans $\Phi(P)$ est $4a - 4a = 0$. Par suite $\Phi$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_4[X]$ et c'est donc un endomorphisme de cet espace.

(b) L'équation

$$y' = \left(\frac{5-\lambda}{2(x-1)} + \frac{3+\lambda}{2(x+1)}\right) y$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution générale

$$y(x) = C|x-1|^{(5-\lambda)/2}|x+1|^{(3+\lambda)/2}$$

sur $I = ]-\infty\,;-1[$, $]-1\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$.

(c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Phi(P) = \lambda P$ si, et seulement si, $P'(X) = \frac{4X+(1+\lambda)}{X^2-1}P(X)$ *i.e.* si, et seulement si, la fonction polynomiale $P$ est solution, par exemple sur $]1\,;+\infty[$, de l'équation différentielle

$$y' = \frac{4x + (1+\lambda)}{x^2-1} y.$$

Or moyennant une décomposition en éléments simples et passage à l'opposé de $\lambda$, cette équation est celle précédemment résolue et le problème est alors de déterminer pour quel paramètre $-\lambda$, la solution précédemment présentée est une fonction polynomiale de degré inférieur à 4. Les valeurs $3, 1, -1, -3, -5$ conviennent et ce sont donc des valeurs propres de $\Phi$, de plus il ne peut y en avoir d'autres car $\dim \mathbb{R}_4[X] = 5$. Les vecteurs propres associés à ces valeurs propres $\lambda$ sont les polynômes

$$C(X-1)^{\frac{5+\lambda}{2}}(X+1)^{\frac{3-\lambda}{2}} \text{ avec } C \neq 0.$$

**Exercice 9 :** [énoncé]

(a) Il suffit de calculer le polynôme caractéristique de $f$ à partir d'une représentation matricielle triangulaire par blocs relative à une base adaptée à l'espace non nul $E(f, a)$.

(b) La matrice $A$ est de rang 1 donc 0 est valeur propre de $A$ et par la formule du rang $\dim E(A, 0) = 3$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Le polynôme caractéristique de $A$ étant de degré 4 et factorisable par $X^3$, c'est un polynôme scindé. La somme des valeurs propres de $A$ comptées avec multiplicité vaut alors $\operatorname{tr} A = 10$.
Par suite 10 est valeur propre de $A$ de multiplicité nécessairement 1.
Finalement $A$ est diagonalisable semblable à $\operatorname{diag}(0, 0, 0, 10)$.

**Exercice 10 :** [énoncé]

(a) L'application $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ car le reste $R$ d'une division euclidienne par $B$ vérifie
$$\deg R < \deg B \leq n.$$
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$.
On a
$$AP_1 = BQ_1 + f(P_1) \text{ et } AP_2 = BQ_2 + f(P_2)$$
donc
$$A(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = B(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$
avec
$$\deg\bigl(\lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)\bigr) \leq \max\bigl\{\deg f(P_1), \deg f(P_2)\bigr\} < \deg B.$$
Par unicité d'une division euclidienne, on peut affirmer
$$f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2).$$
Puisque les valeurs prises par $f$ sont $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'endomorphisme $f$ ne peut être surjectif, ce n'est donc pas un isomorphisme.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f(P) = \lambda P$ alors c'est qu'il existe un polynôme $Q$ tel que
$$AP = BQ + \lambda P.$$
Cas $\lambda = 0$.
On a $f(P) = 0$ si, et seulement si, le polynôme $B$ divise le polynôme $AP$. Or $A$ et $B$ sont premiers entre eux, donc $f(P) = 0$ si, et seulement si, $B$ divise $P$. On en déduit que 0 est valeur propre de $f$ et le sous-espace propre associé est
$$E_0(f) = B.\operatorname{Vect}(1, X, \dots, X^{n-\deg B})$$
c'est-à-dire l'espace des multiples de $B$ inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Cas $\lambda \neq 0$. On obtient
$$(A - \lambda)P = BQ$$
et donc $B$ divise le polynôme $(A - \lambda)P$. Or $\deg P < \deg B$ donc au moins une des racines de $B$ n'est pas racine de $P$ et est donc racine de $A - \lambda$. Ainsi $\lambda = A(x_k)$ avec $x_k$ une des racines de $B$.
Inversement, soit $x_k$ une racine de $B$,$\lambda = A(x_k)$ et
$$P_k = \prod_{j \neq k} (X - x_j) \neq 0.$$
On a $\deg P_k < \deg B$ et $B \mid (A - A(x_k))P_k$. On en déduit $f(P_k) = A(x_k)P_k$ et donc $A(x_k)$ est valeur propre de $f$ et $P_k$ en est un vecteur propre associé.

(c) La famille de $P_k$ se comprend comme la famille d'interpolation de Lagrange en les $x_k$, elle constitue donc une base de $\mathbb{R}_{\deg B-1}[X]$. Puisque $\operatorname{Ker} f = E_0(f)$ est un supplémentaire de cet espace, l'endomorphisme est diagonalisable.

**Exercice 11 :** [énoncé]

Notons $A$ la matrice étudiée.
Après calcul, son polynôme caractéristique est $\chi_A = (X - 9)^3$.
Celui-ci est scindé et par conséquent la matrice $A$ est trigonalisable.
Après résolution
$$E_9(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$\dim E_9(A) = 1$ et $X_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre. Complétons ce vecteur en une base et considérons la matrice de passage associée
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -2 \\ 0 & 12 & -6 \\ 0 & 3/2 & 6 \end{pmatrix}.$$
Considérons alors la sous matrice
$$A' = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 3/2 & 6 \end{pmatrix}$$
de polynôme caractéristique $(X - 9)^2$ car $\chi_A(X) = (X - 9)\chi_{A'}(X)$. Après résolution
$$E_9(A') = \operatorname{Vect}\bigl(1, 1/2\bigr).$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Considérons la matrice de passage

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$(P'^{-1})A'P' = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour

$$Q = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12 :** [énoncé]

(a) Il existe $x \neq 0_Z$, vérifiant

$$u(v(x)) = \lambda x.$$

On a alors

$$(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x).$$

Or $v(x) \neq 0_E$ car $u(v(x)) \neq 0_E$ et $u(0_E) = 0_E$.
On en déduit que $\lambda$ est valeur propre de $v \circ u$.

(b) On observe

$$u \circ v(P) = P \text{ et } v \circ u(P) = P - P(0).$$

On en déduit

$$\operatorname{Ker}(u \circ v) = \{0\} \text{ et } \operatorname{Ker}(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X].$$

En substance, la propriété précédente ne vaut pas pour $\lambda = 0$ en dimension quelconque.

(c) Cependant, en dimension finie, si 0 est valeur propre de $u \circ v$ alors $\det(u \circ v) = 0$ et donc $\det(v \circ u) = 0$ d'où 0 valeur propre de $v \circ u$.

**Exercice 13 :** [énoncé]
Par Sarrus

$$\chi_A = X(X^2 + (a^2 + b^2 + c^2)).$$

(a) Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ alors $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ et la matrice $A$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique n'est pas scindé.
Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ alors $A$ est la matrice nulle.

(b) Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ alors la matrice $A$ diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ car possède trois valeurs propres distinctes à savoir 0 et $\pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ alors $A$ est la matrice nulle.

(c) Puisque 0 est la seule valeur propre réelle de $A$ et puisque $B$ est inversible si, et seulement si, $-\lambda$ n'est pas valeur propre de $A$, on peut conclure que $B$ est inversible pour tout $\lambda \neq 0$.

(d) Puisque le polynôme caractéristique est annulateur de $A$ on a

$$A^3 + (a^2 + b^2 + c^2)A = O_3$$

donc

$$(B - \lambda I_3)^3 + (a^2 + b^2 + c^2)(B - \lambda I_3) = O_3.$$

Il suffit de développer et de réorganiser pour obtenir une expression du type

$$B(uB^2 + vB + wI_3) = I_3$$

et conclure

$$B^{-1} = uB^2 + vB + wI_3 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

**Exercice 14 :** [énoncé]

(a) La linéarité est immédiate et sans peine $\deg(\phi(P)) \leq n$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(b) On a

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k.$$

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X - a)^{k-1}$$

puis

$$\phi(P)(X) = \sum_{k=2}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}(X - a)^k - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k$$

donc

$$\phi(P)(X) = \sum_{k=3}^{n} (k - 2)\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k - 2P'(a)(X - a).$$

Ainsi

$$P \in \operatorname{Ker} \phi \iff P'(a) = 0 \text{ et } \forall 3 \leq k \leq n, P^{(k)}(a) = 0$$

et donc
$$\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Vect}(1, (X-a)^2).$$
Aussi
$$P \in \operatorname{Im}\phi \iff P(a) = P''(a) = 0$$
et donc
$$\operatorname{Im}\phi = (X-a)^3\mathbb{R}_{n-3}[X] + \operatorname{Vect}(X-a).$$

(c) On a
$$\phi(P) = \lambda P \iff \begin{cases} 0 = \lambda P(a) \\ -2P'(a) = \lambda P'(a) \\ (k-2)P^{(k)}(a) = \lambda P^{(k)}(a) \text{ pour } k \in \{2,\dots,n\}. \end{cases}$$
Cette équation possède une solution non nulle si, et seulement si, $\lambda = 0$, $\lambda = -2$ et $\lambda = k-2$ avec $k \in \{2,\dots,n\}$.
Ainsi
$$\operatorname{Sp}(\phi) = \{-2, 0, 1, \dots, n-2\}.$$
On a $E_{-2}(\phi) = \operatorname{Vect}(X-a)$, $E_0(\phi) = \operatorname{Ker}\phi$, $E_{k-2}(\phi) = \operatorname{Vect}(X-a)^k$ pour $k \in \{3,\dots,n\}$.
La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $\dim \mathbb{R}_n[X]$ : l'endomorphisme est diagonalisable.
En fait, la base des $(X-a)^k$ est base de diagonalisation de l'endomorphisme $\phi$.

**Exercice 15 :** [énoncé]
Puisque les entiers $\det A$ et $\det B$ sont premiers entre eux, on peut écrire par l'égalité de Bézout
$$u.\det A + v.\det B = 1 \text{ avec } u, v \in \mathbb{Z}.$$
On écrit $\chi_A(X) = XQ_A(X) + (-1)^n \det A$ et de même $\chi_B(X)$ (ces écritures sont possibles car le déterminant est au signe près le coefficient constant d'un polynôme caractéristique).
Posons alors
$$U = (-1)^{n-1}uQ_A(A) \text{ et } V = (-1)^{n-1}vQ_B(B).$$
Puisque $\chi_A$ et $\chi_B$ sont à coefficients entiers, on a $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
Puisque $\chi_A$ et $\chi_B$ sont annulateurs, on a
$$Q_A(A)A = (-1)^{n-1}\det A.\mathrm{I}_n \text{ et } Q_B(B)B = (-1)^{n-1}\det B.\mathrm{I}_n.$$
On observe alors
$$UA + VB = (u.\det A + v.\det B)\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n.$$
Remarquons que prendre
$$U = u^t\operatorname{Com} A \text{ et } V = v^t\operatorname{Com} B$$
était sans doute plus simple...
Pour
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
les matrices
$$U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
conviennent...

**Exercice 16 :** [énoncé]
(a) La matrice $A$ est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable.
(b) $\operatorname{rg} A = 2$.
(c) Le polynôme caractéristique de $A$ est scindé et unitaire.
Puisque $\dim \operatorname{Ker} A = 2$, 0 est valeur propre au moins double de $A$ et donc
$$\chi_A = X^2(X-u_1)(X-u_2)$$
avec $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$.
La matrice $A$ est trigonalisable semblable à une matrice triangulaire où figurent sur la diagonale les valeurs $0, 0, u_1$ et $u_2$. Par similitude, on a
$$\operatorname{tr} A = u_1 + u_2 \text{ et } \operatorname{tr} A^2 = u_1^2 + u_2^2$$
et donc
$$u_1 + u_2 = k \text{ et } u_1^2 + u_2^2 = k^2 + 6.$$
Enfin $u_1 \neq 0$ car sinon $u_2 = k$ et $u_2^2 = k^2 \neq k^2 + 6$. De même $u_2 \neq 0$.
(d) Si $u_1 = u_2$ alors $u_1 = u_2 = k/2$ et $k^2/2 = k^2 + 6$ donc $k = \pm i2\sqrt{3}$.
La résolution du système
$$AX = \frac{k}{2}X$$
conduit à un espace de solution de dimension 1
$$\operatorname{Vect}{}^t(1, k/2, 1, 1).$$

(e) Finalement, la matrice $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ si, et seulement si, $k \neq \pm \mathrm{i}2\sqrt{3}$.

**Exercice 17 :** [énoncé]
En ajoutant la troisième colonne à la première puis en retranchant la première ligne à la troisième

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \begin{vmatrix} -\lambda-2 & 5+x & x \\ 0 & -2-x-\lambda & -x \\ 0 & -x & 3-x-\lambda \end{vmatrix}$$

ce qui donne

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda+2)\big(\lambda^2 + (2x-1)\lambda - x - 6\big).$$

Le facteur a pour discriminant

$$\Delta = (2x-1)^2 + 4x + 24 = 4x^2 + 25 > 0$$

et possède donc deux racines réelles distinctes. Si celles-ci diffèrent de $-2$, alors la matrice $A$ possède trois valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.
Il est donc nécessaire que $-2$ soit racine de $\lambda^2 + (2x-1)\lambda - x - 6$ pour que la matrice $A$ ne soit pas diagonalisable. C'est le cas si, et seulement si, $x = 0$ et alors

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\operatorname{rg}(A + 2I_3) = 2$$

et donc $\dim E_{-2}(A) = 1 < m_{-2}(A)$ ce qui entraîne que la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.
Finalement $A$ n'est pas diagonalisable si, et seulement si, $x = 0$.

**Exercice 18 :** [énoncé]

(a) On obtient

$$\operatorname{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 2 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) D'une part

$$f(e_1 + \cdots + e_n) = (n+1)(e_1 + \cdots + e_n)$$

et d'autre part, pour $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ avec $x_1 + \cdots + x_n = 0$ on a

$$f(x) = x.$$

On en déduit que 1 et $n+1$ sont valeurs propres de $f$ et puisque la valeur propre 1 est associé à un hyperplan, il ne peut y avoir d'autres valeurs propres.
En résumé $\operatorname{Sp} f = \{1, n+1\}$ et

$$E_1(f) = \{x \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\} \text{ et } E_{n+1}(f) = \operatorname{Vect}(e_1 + \cdots + e_n).$$

(c) L'endomorphisme $f$ est diagonalisable car

$$\dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) = n.$$

(d) Par les valeurs propres

$$\det f = (n+1) \neq 0$$

et l'endomorphisme $f$ est inversible...

**Exercice 19 :** [énoncé]
Les coefficients de ${}^t\mathrm{Com}(A)A$ s'interprètent comme des développements de déterminants selon une colonne...
Si $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes, $\det A$ est le produit de ces valeurs propres.
Si $X \neq 0$ vérifie $AX = \lambda X$ alors $\lambda\,{}^t\mathrm{Com}(A)X = (\det A)X$.
Ainsi quand $\lambda \neq 0$, $X$ est vecteur propre de ${}^t\mathrm{Com}(A)$ associé à la valeur propre $\frac{\det A}{\lambda}$.
Si $A$ n'est pas inversible alors $\det A = 0$ donc ${}^t\mathrm{Com}(A)A = 0$ puis $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} {}^t\mathrm{Com}(A)$.
Ainsi $\dim \operatorname{Ker} {}^t\mathrm{Com}(A) \geq n-1$. De plus $\mathrm{Com}(A) \neq 0$ car $\operatorname{rg} A = n-1$ (car les valeurs propres de $A$ sont simples, en particulier 0). Par suite $\dim \operatorname{Ker} {}^t\mathrm{Com}(A) = n-1$
Sous réserve que $n \geq 2$, 0 est valeur propre de ${}^t\mathrm{Com}(A)$ et puisque $\dim \operatorname{Ker} {}^t\mathrm{Com}(A) = n-1$, il ne reste de place que pour une seule autre valeur propre.
Soit $X \in \operatorname{Ker} A \setminus \{0\}$,. On a ${}^t\mathrm{Com}(A + t\mathrm{I}_n)(A + t\mathrm{I}_n)X = \det(A + t\mathrm{I}_n)X$
Pour $t \neq 0$, on a

$${}^t\mathrm{Com}(A + t\mathrm{I}_n)X = \frac{\det(A + t\mathrm{I}_n)}{t}X.$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Quand $t \to 0^+$, par continuité

$$^t\mathrm{Com}(A+t\mathrm{I}_n)X \to {}^t\mathrm{Com}(A)X.$$

En calculant le déterminant par diagonalisation, $\frac{\det(A+t\mathrm{I}_n)}{t} \to \mu$ avec $\mu$ le produit des valeurs propres non nulles de $A$.
Par unicité de la limite, on obtient $^t\mathrm{Com}(A)X = \mu X$.
Au final, $^t\mathrm{Com}(A)$ admet 2 valeurs propres : 0 et $\mu$.

**Exercice 20 :** [énoncé]

(a) $\chi_A = X(X-1)(X-a)$.
Si $a \neq 0, 1$ alors $A$ est diagonalisable.
Si $a = 0$ alors $\mathrm{rg}\, A = 2$ donc $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1 < m_0(A)$ et la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.
Si $a = 1$ alors $\mathrm{rg}(A - \mathrm{I}) = 2$ et par le même argument qu'au dessus, $A$ n'est pas diagonalisable.
On conclut

$$\Omega = \{0, 1\}.$$

(b) Cas $a = 0$

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Ker}(A-\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Par conséquent la matrice suivante convient

$$P = \begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

Cas $a = 1$

$$\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Ker}(A-\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Par conséquent la matrice suivante convient

$$P = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

**Exercice 21 :** [énoncé]

(a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $\varphi$.
Il existe $v \in \mathcal{L}(E) \setminus \{\tilde{0}\}$ tel que $u \circ v = \lambda v$.
Soit alors $x \in E$ tel que $v(x) \neq 0$ (ce qui est possible puisque $v \neq \tilde{0}$)
Puisque $u\big(v(x)\big) = \lambda v(x)$, on peut affirmer que $\lambda$ est valeur propre de $u$.
Inversement soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $x \neq 0$ un vecteur propre associé.
Considérons $v$ l'endomorphisme de $E$ déterminé par

$$\forall 1 \leq i \leq n, v(e_i) = x.$$

L'endomorphisme $v$ est bien déterminé puisqu'on a ici fixé l'image d'une base.
Puisque a $u \circ v = \lambda v$ (car cette égalité vaut pour les vecteurs d'une base), on obtient $\varphi(v) = \lambda v$ avec $v \neq \tilde{0}$. Ainsi $\lambda$ est aussi valeur propre de $\varphi$.
b et c) Sachant $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$,

$$UE_{i,j} = \sum_{k,\ell=1}^{n} u_{k,\ell}E_{k,\ell}E_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} u_{k,i}E_{k,j}.$$

Dans la base $\big((E_{1,1}, \dots, E_{n,1}), (E_{1,2}, \dots, E_{n,2}), \dots, (E_{1,n}, \dots, E_{n,n})\big)$, la matrice de $\varphi$ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux chacun égaux à $U$.

**Exercice 22 :** [énoncé]
Posons

$$A = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

On obtient aisément $\mathrm{Sp}\, A = \{0, 2\}$

(a) Soit $M$ une matrice solution de l'équation $M^2 + M = A$.
Si $\lambda$ est valeur propre de $M$ alors $\lambda^2 + \lambda$ est valeur propre de $A$ et donc

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \text{ ou } \lambda^2 + \lambda = 2.$$

On en déduit

$$\lambda \in \{0, -1, 1, -2\}.$$

(b) Posons

$$P(X) = X(X+1)(X-1)(X+2) = (X^2+X)(X^2+X-2).$$

On a

$$P(M) = A(A - 2I_2) = O_2.$$

Puisque $M$ annule un polynôme scindé à racines simple, la matrice $M$ est diagonalisable.

Notons $\lambda$ et $\mu$ ses deux valeurs propres. Puisque $\lambda^2+\lambda$ et $\mu^2+\mu$ correspondent aux deux valeurs propres de $A$, on a, quitte à échanger $\lambda$ et $\mu$ :

$$\lambda \in \{0,-1\} \text{ et } \mu \in \{1,-2\}.$$

Il y a alors quatre situations possibles :
Cas $\lambda = 0$ et $\mu = 1$
On a $M(M-I_2) = O_2$ donc $M^2 - M = O_2$. Combinée à la relation $M^2 + M = A$, on obtient

$$M = \frac{1}{2}A.$$

Cas $\lambda = 0$ et $\mu = -2$
Un raisonnement analogue donne

$$M = -A.$$

Cas $\lambda = -1$
On obtient

$$M = A - I_2 \text{ et } M = -I_2 - \frac{1}{2}A.$$

Inversement, on vérifie par le calcul que ces matrices sont solutions.

**Exercice 23 :** [énoncé]

(a) On obtient

$$A^tA = (a^2+b^2+c^2+d^2)I_4$$

et donc $(\det A)^2 = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4$.
D'autre part, pour $b,c,d$ fixés, $a \mapsto \det A$ est une fonction polynomiale unitaire de degré 4 donc

$$\det A = a^4 + \alpha(b,c,d)a^3 + \beta(b,c,d)a^2 + \gamma(b,c,d)a + \delta(b,c,d).$$

La valeur connue de $(\det A)^2$ permet alors de déterminer $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ et d'affirmer

$$\det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

Si $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$ alors $\operatorname{rg}(A) = 4$.
Si $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$ alors $\operatorname{rg}(A) \leq 3$. Or $a^2+b^2 \neq 0$ donc la sous matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ est de rang 2 et donc $\operatorname{rg}(A) \geq 2$.
On observe de plus que

$$C_3 = \frac{ac+bd}{a^2+b^2}C_1 + \frac{bc-ad}{a^2+b^2}C_2$$

et

$$C_4 = \frac{ad-bc}{a^2+b^2}C_1 + \frac{bd+ac}{a^2+b^2}C_2$$

donc $\operatorname{rg}(A) = 2$.

(b) Par la formule obtenue ci-dessus, $\chi_A = ((a-X)^2+b^2+c^2+d^2)$ et donc $\chi_A = ((a-X)^2+\alpha^2)^2$.
Les valeurs propres de $A$ sont $a+\alpha$ et $a-\alpha$.
Par l'étude qui précède $\operatorname{rg}(A-(a+\alpha)\mathrm{Id}) = 2$ et $\operatorname{rg}(A-(a-\alpha)\mathrm{Id}) = 2$ donc

$$\dim E_{a+\alpha}(A) = \dim E_{a-\alpha}(A) = 2$$

et par suite $A$ est diagonalisable.

**Exercice 24 :** [énoncé]

(a) L'image d'un endomorphisme est toujours stable par celui-ci... En effet

$$\forall x \in \operatorname{Im} u, u(x) \in \operatorname{Im} u.$$

(b) Si $x \in \operatorname{Im} u$ alors il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$. On a alors

$$u^2(x) = u^3(a) = -u(a) = -x.$$

(c) En vertu de ce qui précède, $v^2 = -\mathrm{Id}$ donc $v$ est un isomorphisme et $v^{-1} = -v$.

(d) D'une part

$$\det(v^{-1}) = \frac{1}{\det v}$$

et d'autre part

$$\det(-v) = (-1)^{\dim \operatorname{Im} u} \det v$$

donc

$$(-1)^{\dim \operatorname{Im} u} > 0.$$

On en déduit que la dimension de l'image de $u$ est paire.

**Exercice 25 :** [énoncé]

(a) $\operatorname{rg}(A) = 0$ si $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ et $\operatorname{rg}(A) = 2$ sinon.

(b) La somme des valeurs propres est nulle.

(c) En développant le déterminant selon la dernière colonne puis en développant les mineurs obtenus selon leur $k$-ieme colonne, on obtient

$$\chi_A = X^{n-2}(X^2 - (a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2)).$$

Si $a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \neq 0$ alors $A$ admet deux valeurs propres opposées non nulles et 0 pour valeur propre d'espace propre de dimension $n-2$ donc $A$ est diagonalisable.
Si $a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = 0$ alors 0 est la seule valeur propre de $A$ et $A$ est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$ *i.e.* $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

**Exercice 26 :** [énoncé]
Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u)$ non nul. On a

$$v^3(x) = u^3(x) = \lambda^3 x.$$

Or $v$ est diagonalisable donc, en notant $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres de $v$, on a la décomposition en somme directe

$$E = \bigoplus_{j=1}^{p} E_{\mu_j}(v).$$

On peut alors écrire $x = \sum_{j=1}^p x_j$ avec $x_j \in E_{\mu_j}(u)$. L'égalité $v^3(x) = \lambda^3 x$ donne

$$\sum_{j=1}^{p} \mu_j^3 x_j = \sum_{j=1}^{p} \lambda^3 x_j.$$

Les espaces $E_{\mu_j}(v)$ étant en somme directe, on peut identifier les termes de ces sommes

$$\mu_j^3 x_j = \lambda^3 x_j.$$

Si $x_j \neq 0_E$, on obtient $\mu_j = \lambda$ et donc $\mu_j x_j = \lambda x_j$.
Si $x_j = 0_E$, l'identité $\mu_j x_j = \lambda x_j$ reste vraie.
On en déduit

$$v(x) = \lambda x = u(x).$$

Ainsi les endomorphismes $v$ et $u$ coïncident sur $E_\lambda(u)$. Or, l'endomorphisme $u$ étant diagonalisable, $E$ est la somme des sous-espaces propres de $u$. Les endomorphismes $v$ et $u$ coïncident donc sur $E$.

**Exercice 27 :** [énoncé]

(a) Poser le produit par blocs.

(b) Si $A$ et $B$ sont inversibles alors $(A * B)(A^{-1} * B^{-1}) = I_n * I_n = I_{n^2}$ donc $A * B$ est inversible.
Si $A$ n'est pas inversible alors il existe $A' \neq 0$ tel que $AA' = O_n$ et alors $(A * B)(A' * I_n) = 0$ avec $A' * I_n \neq 0$ donc $A * B$ n'est pas inversible.
Un raisonnement semblable s'applique dans le cas où $B$ n'est pas inversible.

(c) Il existe $P, Q$ matrices inversibles telles que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i$ et $\mu_i$ les valeurs propres de $A$ et $B$.
On observe alors que $(P^{-1} * Q^{-1})(A * B)(P * Q) = (P^{-1}AP) * (Q^{-1}BQ)$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $\lambda_i \mu_j$. Les valeurs propres de $A * B$ sont les produits des valeurs propres de $A$ et $B$.

(d) On note que $P^{-1} * Q^{-1} = (P * Q)^{-1}$ de sorte que $A * B$ est semblable à la matrice triangulaire précédente et donc

$$\chi_{A*B} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_i \mu_j).$$

On en déduit

$$\det(A * B) = (\det A \det B)^n$$

et la relation

$$\mathrm{tr}(A * B) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$$

est immédiate par un calcul direct.

**Exercice 28 :** [énoncé]

(a) La matrice $A$ annule le polynôme $X^p - 1$ qui est scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ donc $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(b) Les valeurs propres $\alpha$ et $\beta$ sont racines du polynôme annulateur donc $\alpha^p = \beta^p = 1$. En particulier $|\alpha| = |\beta| = 1$.
Puisque $\det A = \alpha\beta = 1$, on a $\alpha = 1/\beta = \overline{\beta}/|\beta|^2 = \overline{\beta}$.
Enfin, $\mathrm{tr}A = 2\mathrm{Re}(\alpha) \in \mathbb{Z}$ et $2\mathrm{Re}(\alpha) \in [-2\,;2]$ car $|\alpha| \leq 1$ donc $\left|\mathrm{Re}(\alpha)\right| \in \{0, 1/2, 1\}$.

(c) Selon la valeur de $\operatorname{Re}(\alpha)$ et sachant $|\alpha| = 1$, les valeurs possibles de $\alpha$ sont

$$-1, j, i, -j^2, 1$$

et leurs conjuguées.
Dans tous les cas, on vérifie $\alpha^{12} = 1$ et on a aussi $\beta^{12} = 1$.
Puisque $A$ est semblable à la matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\alpha, \beta)$ et que celle-ci vérifie $D^{12} = \mathrm{I}_2$, on a $A^{12} = \mathrm{I}_2$.

(d) On vérifie aisément que $G$ est un sous-groupe du groupe $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \times)$ et puisque

$$G = \left\{\mathrm{I}_2, A, A^2, \dots, A^{11}\right\}$$

$G$ est un groupe monogène fini.

**Exercice 29 :** [énoncé]

(a) On sait déjà $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. On a $P = XQ$ avec $Q(0) \neq 0$. Pour $x \in \operatorname{Ker} u^2$, on a $u^2(x) = 0$ et $Q(u)(u(x)) = 0$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} Q(u)$ puis $u(x) = 0$ car $Q(0) \neq 0$. On en déduit $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$ puis l'égalité.
L'inclusion $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$ est entendue.
Inversement, soit $x \in \operatorname{Im} u$. On peut écrire $x = u(a)$ pour un certain $a \in E$.
Or $P(u)(a) = 0$ et l'on peut écrire $P$ sous la forme

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X \text{ avec } a_1 \neq 0$$

donc

$$a_1 u(a) \in \operatorname{Im} u^2$$

puis $x \in \operatorname{Im} u^2$.
Ainsi $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$

(b) Pour $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, il existe $a \in E$, $x = u(a)$ et $a \in \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$ donc $x = 0$.
Pour $x \in E$, $u(x) \in \operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$ et on peut écrire $u(x) = u^2(a)$ pour un certain $a \in E$. On a alors $x = y + z$ avec $y = u(a) \in \operatorname{Im} u$ et $z = x - y$ où l'on vérifie $z \in \operatorname{Ker} u$.

**Exercice 30 :** [énoncé]

(a) On vérifie par le biais des relations proposées

$$M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu \mathrm{I}_p = O_p.$$

On en déduit

$$M\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu}\mathrm{I}_p - \frac{1}{\lambda\mu}M\right) = \mathrm{I}_p.$$

Par le théorème d'inversibilité, $M$ est inversible et

$$M^{-1} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu}\mathrm{I}_p - \frac{1}{\lambda\mu}M.$$

(b) $M - \mu\mathrm{I}_p = (\lambda - \mu)A$ et $M - \lambda\mathrm{I}_p = (\mu - \lambda)B$.
Or

$$(M - \mu\mathrm{I}_p)(M - \lambda\mathrm{I}_p) = M^2 - (\lambda + \mu)M + \lambda\mu\mathrm{I}_p = \mathrm{O}_p$$

donc $(\lambda - \mu)^2 AB = \mathrm{O}_p$ puis $AB = \mathrm{O}_p$ car $\lambda \neq \mu$.
Puisque $A = A \times \mathrm{I}_p = A^2 + AB = A^2$, $A$ est un projecteur.
Il en est de même pour $B$.

(c) $M$ annule le polynôme scindé simple

$$X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu = (X - \lambda)(X - \mu).$$

La matrice $M$ est donc diagonalisable et $\operatorname{Sp}(M) \subset \{\lambda, \mu\}$.
Il se peut que cette inclusion soit stricte, c'est le cas si $M = \lambda\mathrm{I}_p$ avec $A = \mathrm{I}_p$ et $B = \mathrm{O}_p$.
En tout cas, le spectre n'est pas vide car $M$ est diagonalisable.

**Exercice 31 :** [énoncé]
On observe

$$f \circ f(M) = \operatorname{tr}(A)\big(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A\big) - \operatorname{tr}\big(\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A\big)A = \operatorname{tr}(A)f(M).$$

Ainsi

$$f \circ f = \operatorname{tr}(A).f.$$

Si $\operatorname{tr} A \neq 0$ alors l'endomorphisme $f$ est diagonalisable car annule le polynôme $X^2 - \operatorname{tr}(A)X$ qui est scindé à racines simples.
Si $\operatorname{tr} A = 0$ alors les valeurs propres de $f$ figurent parmi les racines du polynôme $X^2$. Seule 0 peut donc être valeur propre de $f$ et par conséquent $f$ est diagonalisable si, et seulement si, $f = \tilde{0}$. Ceci correspond au cas $A = O_n$.
Déterminons maintenant les sous-espaces propres de $f$.
Le cas $A = O_n$ est immédiat. Supposons-le désormais exclu.
Si $\operatorname{tr}(M) = 0$ alors

$$f(M) = \operatorname{tr}(A)M.$$

Pour $M$ matrice de l'hyperplan des matrices de trace nulle, $f(M) = \lambda M$ avec $\lambda = \operatorname{tr}(A)$. On en déduit que $\operatorname{tr}(A)$ est valeur propre de $M$ et le sous-espace propre associé est de dimension au moins $n^2 - 1$.
Dans le cas où $\operatorname{tr}(A) = 0$, l'endomorphisme n'est pas diagonalisable et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\operatorname{tr}(A)$ est exactement $n^2 - 1$.
Dans le cas où $\operatorname{tr}(A) \neq 0$, l'endomorphisme $f$ est diagonalisable et donc la dimension des sous-espaces propres des valeurs propres 0 et $\operatorname{tr}(A)$ sont respectivement 1 et $n^2 - 1$.

**Exercice 32 :** [énoncé]

(a) $p + q = \mathrm{Id}$, $p \circ q = 0$ car $(u - a\mathrm{Id})(u - b\mathrm{Id}) = 0$,
$p = p \circ \mathrm{Id} = p \circ p + p \circ q = p \circ p$, aussi $q \circ q = q$ via $q \circ p = 0$.

(b) $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(u - a\mathrm{Id})$, $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker}(u - b\mathrm{Id})$ et $(u - a\mathrm{Id})(u - b\mathrm{Id}) = 0$ donne par le lemme de décomposition des noyaux, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q$.

(c) $u$ est diagonalisable car annule un polynôme scindé simple,
$\operatorname{Sp}(u) = \{a, b\}$, $E_a(u) = \operatorname{Ker} p$, $E_b(u) = \operatorname{Ker} q$ à moins que $u = a\mathrm{Id}$ ou $u = b\mathrm{Id}$.

**Exercice 33 :** [énoncé]

(a) L'application $f$ est évidemment bien définie de $E$ dans $E$ et est aussi linéaire car

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda x + \mu y + k(\lambda (x \mid a) + \mu (x \mid a))a = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

L'application $f$ est donc endomorphisme de $E$. De plus

$$(f(x) \mid y) = (x \mid y) + k(x \mid a)(y \mid a) = (x \mid f(y)).$$

Ainsi l'endomorphisme $f$ est symétrique (et par conséquent diagonalisable dans une base orthonormée).

(b) Si $f(x) = 0_E$ alors $x + k(x \mid a)a = 0_E$ et donc $x \in \operatorname{Vect} a$.
Or $f(a) = (1 + k)a \neq 0_E$ donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et par suite $f$ est un automorphisme de $E$.

(c) On a $f(a) = (1 + k)a$ donc $1 + k \in \operatorname{Sp} f$ et

$$\operatorname{Vect} a \subset E_{1+k}(f).$$

Pour $x \in \operatorname{Vect}(a)^\perp$, $f(x) = x$ donc $1 \in \operatorname{Sp} f$ et

$$(\operatorname{Vect} a)^\perp \subset E_1(f).$$

On peut alors conclure que si $k \neq 0$ alors

$$\operatorname{Sp} f = \{1, 1 + k\}, E_{1+k}(f) = \operatorname{Vect} a \text{ et } E_1(f) = (\operatorname{Vect} a)^\perp$$

car la somme des dimensions des sous-espaces propres de $f$ ne peut excéder $n$.
Dans le cas $k = 0$, on a $f = \mathrm{Id}$.

**Exercice 34 :** [énoncé]

(a) Existence :
L'endomorphisme $u$ est symétrique donc diagonalisable en base orthonormée. Soit $\mathcal{B}$ une telle base et

$$D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Considérons alors $v$ l'endomorphisme de $E$ déterminé par

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \sqrt[p]{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt[p]{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme $v$ est symétrique car représenté par une matrice symétrique en base orthonormée.
L'endomorphisme $v$ vérifie par construction $v^p = u$ : il est solution.
Unicité :
Soit $v$ un endomorphisme symétrique solution. L'endomorphisme $v$ commute avec $u$, les sous-espaces propres de $u$ sont donc stables par $v$. Soit $E_\lambda(u)$ un tel sous-espace propre. L'endomorphisme induit par $v$ sur ce sous-espace propre est diagonalisable, considérons une base $\mathcal{B}_\lambda$ de diagonalisation. La matrice de l'endomorphisme induit par $v$ dans cette base $\mathcal{B}_\lambda$ est diagonale et sa puissance $p$ -ième est égale à $\lambda\mathrm{Id}$ car $v^p = u$. On en déduit que l'endomorphisme induit par $v$ sur l'espace $E_\lambda(u)$ n'est autre que $\sqrt[p]{\lambda}\mathrm{Id}$. Ceci détermine entièrement $v$ sur chaque sous-espace propre de $u$. Or ces derniers forment une décomposition en somme directe de $E$, l'endomorphisme $v$ est donc entièrement déterminé.

(b) Si $p$ est pair et que $u$ possède une valeur propre négative, l'endomorphisme $v$ n'existe pas.

(c) Si $p$ est pair et $u$ positif alors on peut à nouveau établir l'existence mais l'unicité n'est plus vraie car on peut changer les signes des valeurs propres de $v$ tout en conservant la propriété $v^p = u$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(d) On retrouve existence et unicité en adaptant la démonstration qui précède.

**Exercice 35 :** [énoncé]

(a) On a
$$(x\,|\,f(x)) = -(x\,|\,f(x))$$
donc $x$ et $f(x)$ sont orthogonaux et ce, quel que soit $x$ dans $E$.

(b) Pour tout $x, y \in E$
$$(s(x)\,|\,y) = -(f(x)\,|\,f(y)) = (x\,|\,s(y))$$
et donc l'endomorphisme $s$ est symétrique.

(c) Ici $x \in V_a \setminus \{0_E\}$ donc $s(x) = ax$ puis
$$(s(x)\,|\,x) = (ax\,|\,x) = a\|x\|^2.$$
On a aussi comme vu ci-dessus
$$(s(x)\,|\,x) = -(f(x)\,|\,f(x)) = -\|f(x)\|^2.$$
Puisque $x \neq 0_E$ et $f(x) \neq 0_E$ (car $f$ est bijective), on en déduit $a < 0$.

(d) Puisque $f(x) \in F$ et $f(f(x)) = s(x) = ax \in F$, on peut assurer que $F$ est stable par $f$.
Pour $y \in F^\perp$, on a
$$(f(y)\,|\,x) = -(y\,|\,f(x)) = 0 \text{ et } (f(y)\,|\,f(x)) = -(y\,|\,s(x)) = -a(y\,|\,x) = 0$$
et donc $f(y) \in F^\perp$. L'espace $F^\perp$ est donc aussi stable par $f$.
Posons
$$u = \frac{x}{\|x\|} \text{ et } v = \frac{1}{b}f(u) \text{ avec } b = \sqrt{-a}.$$
La famille $(u, v)$ est une base orthonormée de $F$ notamment car
$$\|v\|^2 = \frac{1}{b^2}(f(u)\,|\,f(u)) = -\frac{1}{b^2}(u\,|\,s(u)) = -\frac{a}{b^2}\|u\|^2 = 1.$$
Puisque
$$f(u) = bv \text{ et } f(v) = \frac{1}{b}s(x) = \frac{a}{b}x = -bx$$
la matrice de l'endomorphisme induit par $f$ sur $F$ dans la base orthonormée $(u, v)$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) Par les outils qui précèdent, on parvient par récurrence, à décomposer l'espace $E$ en somme directe orthogonale de plans stables par $f$, l'espace $E$ est donc de dimension paire.

**Exercice 36 :** [énoncé]

(a) Pour tout vecteur $x$ de $E$,
$$(x\,|\,f(\lambda y + \mu z)) = -(f(x)\,|\,\lambda y + \mu z) = -\lambda(f(x)\,|\,y) - \mu(f(x)\,|\,z).$$
Ainsi
$$(x\,|\,f(\lambda y + \mu z)) = (x\,|\,\lambda f(y) + \mu f(z)).$$
Or ceci valant pour tout $x$, on peut affirmer
$$f(\lambda y + \mu z) = \lambda f(y) + \mu f(z)$$
(par exemple, parce que le vecteur différence est orthogonal à tout vecteur de $E$ et donc nul)
L'application $f$ est donc linéaire.
Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice de $f$ dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Puisque $a_{i,j}$ correspond à la $i$-ème coordonnée de l'image du $j$-ème vecteur, on a
$$a_{i,j} = (e_i\,|\,f(e_j))$$
car la base canonique est orthonormée. L'antisymétrie de $f$ donne alors
$$a_{i,j} = -a_{j,i}$$
et la matrice $A$ est donc antisymétrique.

(b) Les endomorphismes antisymétriques sont, par représentation matricielle, en correspondance avec les matrices antisymétriques. L'ensemble des matrices antisymétriques est un sous-espace vectoriel de dimension $n(n-1)/2$, donc, par l'isomorphisme de représentation matricielle, l'ensemble des endomorphismes antisymétriques est un sous-espace vectoriel de dimension
$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

**Exercice 37 :** [énoncé]
Posons
$$R_1 = \mathrm{Rot}_{k,\pi/2} \text{ et } R_2 = \mathrm{Rot}_{\cos\theta i + \sin\theta j,\pi}\,.$$

La composée de deux rotations est une rotation, donc $R_1 \circ R_2$ est une rotation.
Puisque les vecteurs $k$ est $u = \cos\theta i + \sin\theta j$ sont orthogonaux

$$R_2(k) = -k$$

et donc

$$R_1 \circ R_2(k) = -k.$$

On en déduit que $R_1 \circ R_2$ est un retournement dont l'axe est orthogonal à $k$ *i.e.* inclus dans $\mathrm{Vect}(i, j)$.
Puisque

$$R_2(u) = u \text{ et } R_1(u) = -\sin\theta i + \cos\theta j$$

on a

$$R_2 \circ R_1(u) = -\sin\theta i + \cos\theta j$$

et donc

$$u + R_2 \circ R_1(u) = (\cos\theta - \sin\theta)i + (\cos\theta + \sin\theta)j \neq 0$$

dirige l'axe du retournement.

**Exercice 38 :** [énoncé]

(a) Soient $x \in \operatorname{Ker} v$ et $y = v(a) \in \operatorname{Im} v$. On a$u(x) = x$ et $y = u(a) - a$ donc

$$(x \,|\, y) = (u(x) \,|\, u(a)) - (x \,|\, a) = 0$$

car $u$ conserve le produit scalaire. Ainsi $\operatorname{Ker} v \subset (\operatorname{Im} v)^\perp$ puis l'égalité par égalité des dimensions.

(b) Pour $x \in E$, on peut écrire $x = a + b$ avec $a \in \operatorname{Ker} v$ et $b \in (\operatorname{Ker} v)^\perp = \operatorname{Im} v$. On a $u(a) = a$ et donc $u^k(a) = a$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'autre part, il existe $c$ tel que $b = v(c) = u(c) - c$ de sorte que $u^k(b) = u^{k+1}(c) - u^k(c)$. Par télescopage,

$$u_n(x) = a + \frac{1}{n}u^n(c) - \frac{1}{n}c.$$

Puisque $u$ conserve la norme :

$$\left\|\frac{1}{n}u^n(c)\right\| = \frac{1}{n}\|c\| \to 0$$

et donc

$$u_n(x) \to a.$$

**Exercice 39 :** [énoncé]

(a) Soit $x \in \operatorname{Ker} v$ et $y = v(a) \in \operatorname{Im} v$. On a $u(x) = x$ et $y = u(a) - a$ donc

$$(x \,|\, y) = (u(x) \,|\, u(a)) - (x \,|\, a) = 0.$$

Car $u$ conserve le produit scalaire.
On en déduit $\operatorname{Ker} v \subset (\operatorname{Im} v)^\perp$ puis l'égalité par un argument de dimension.

(b) Par ce qui précède, on peut affirmer

$$E = \operatorname{Ker} v \oplus^\perp \operatorname{Im} v$$

et cette supplémentarité assure l'existence de $x_1$ et $y$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$u^k(x_1) = x_1 \text{ et } u^k(v(y)) = u^{k+1}(y) - u^k(y).$$

En sommant et après télescopage, on obtient

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x) = x_1 + \frac{1}{N}(u^N(y) - y).$$

(c) Avec les notations qui précèdent $p(x) = x_1$. Ainsi

$$\left\|p(x) - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} u^k(x)\right\| = \frac{\|u^N(y) - y\|}{N} \leq \frac{\|u^N(y)\| + \|y\|}{N} = \frac{2}{N}\|y\| \to 0.$$

**Exercice 40 :** [énoncé]

(a) L'application est évidemment linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

(b) Si $f_{a'}$ conserve la norme alors en particulier $\|f_{a'}(u)\| = \|u\|$ *i.e.* $|1 + a'|\|u\| = \|u\|$.
La seule valeur $a'$ non nulle est alors $a' = -2$.
Inversement $f_{-2}$ se reconnaît comme la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ et conserve donc la norme.

(c) On vérifie aisément par le calcul

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \langle f_a(x), y\rangle = \langle x, f_a(y)\rangle\,.$$

On en déduit que $f_a$ est un endomorphisme symétrique.
Pour $x \in \mathrm{Vect}(u)$, on a $f_a(x) = (1 + a)x$ et pour $x \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$, $f_a(x) = x$.
On en déduit que $1 + a$ et $1$ sont valeurs propres de $u$ avec

$$E_{1+a}(f_a) = \mathrm{Vect}(u) \text{ et } E_1(f_a) = \mathrm{Vect}(u)^\perp.$$

Il n'y a pas d'autres valeurs propres (plus assez de place dans $\mathbb{R}^3$ ...).

**Exercice 41 :** [énoncé]
La matrice $A$ est symétrique réelle donc diagonalisable.
Après calculs
$$\chi_A = -(X+3)(X-3)^2.$$
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est le plan d'équation
$x+y+z=0$.
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux, on peut affirmer que le sous-espace propre associé à la valeur propre $-3$ est la droite $x=y=z$.
On en déduit une base orthonormée de diagonalisation puis une matrice $P$ convenable
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

**Exercice 42 :** [énoncé]

(a) La matrice $A$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

(b) Après calculs
$$\chi_A = (X-3)(X+3)^2.$$
Le sous-espace propre associé à la valeur propre $-3$ est le plan d'équation
$$x-2y+z=0.$$
Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle étant deux à deux orthogonaux, on peut affirmer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est la droite
$$\mathrm{Vect}(1,-2,1).$$
On en déduit une base orthonormée de diagonalisation puis une matrice orthogonale $P$ convenable
$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
pour
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD