Équations différentielles linéaires

Résolution d'équations d'ordre 1

Exercice 1 [01541] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(a) $y' + 2y = x^2$
(b) $y' + y = 2\sin x$
(c) $y' - y = (x+1)\mathrm{e}^x$
(d) $y' + y = x - \mathrm{e}^x + \cos x$

Exercice 2 [01543] [Correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0.$$

Exercice 3 [01542] [Correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(a) $(x^2+1)y' + 2xy + 1 = 0$
(b) $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)^{3/2}$
(c) $(x^2+1)^2y' + 2x(x^2+1)y = 1$

Exercice 4 [01280] [Correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés

(a) $(1+\mathrm{e}^x)y' + \mathrm{e}^x y = (1+\mathrm{e}^x)$ sur $\mathbb{R}$
(b) $(\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$,
(c) $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 5 [01281] [Correction]
Résoudre sur $]-1\,;1[$ l'équation différentielle suivante

$$\sqrt{1-x^2}y' + y = 1.$$

Exercice 6 [01379] [Correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés

(a) $(2+\cos x)y' + \sin(x)y = (2+\cos x)\sin x$ sur $\mathbb{R}$
(b) $(1+\cos^2 x)y' - \sin 2x.y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$
(c) $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$ sur $]0\,;\pi[$,
(d) $(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$ sur $]0\,;\pi[$.

Exercice 7 [01434] [Correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés

(a) $\operatorname{ch} x.y' - \operatorname{sh} x.y = \operatorname{sh}^3 x$ sur $\mathbb{R}$
(b) $y' - \frac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}y = \operatorname{sh} x$ sur $\mathbb{R}$
(c) $\operatorname{sh}(x)y' - \operatorname{ch}(x)y = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$,

Résolution d'équations d'ordre 2

Exercice 8 [01550] [Correction]
Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts.
Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 9 [03849] [Correction]
Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$(E)\colon y'' - 3y' + 2y = \sin(2x).$$

Problèmes se ramenant à la résolution d'une équation différentielle

Exercice 10 [01546] [Correction]
Déterminer les fonctions $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in [0\,;1], f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 11 [01552] [Correction]
Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)+f(-x)=\mathrm{e}^x.$$

Exercice 12 [03197] [Correction]
Déterminer les fonctions réelles f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=f(2-x).$$

Exercice 13 [00379] [Correction]
Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=\mathrm{e}^x f(y)+\mathrm{e}^y f(x).$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + C\mathrm{e}^{-2x}$.

(b) $y(x) = -\cos x + \sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.

(c) $y(x) = \left(x^2/2 + x\right)\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^x$.

(d) $y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 : [énoncé]
Sur I,

$$xy' - \alpha y = 0 \iff y' = \frac{\alpha}{x}y.$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

$$\int \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{d}x = \alpha\ln|x|$$

donc la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(x) = C|x|^\alpha.$$

Exercice 3 : [énoncé]

(a) $y(x) = \frac{C-x}{1+x^2}$

(b) $y(x) = \sqrt{1+x^2}(C+x)$

(c) $y(x) = \frac{C+\arctan x}{1+x^2}$

Exercice 4 : [énoncé]

(a) $y(x) = \frac{C+x+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

(b) $y(x) = \frac{C+x}{\mathrm{e}^x-1}$

(c) $y(x) = \frac{C+\ln x}{(1+\ln^2 x)}$

Exercice 5 : [énoncé]
On obtient la solution générale

$$y(x) = 1 + C\mathrm{e}^{\arccos x}$$

ou encore, et c'est équivalent

$$y(x) = 1 + C'\mathrm{e}^{-\arcsin x}.$$

Exercice 6 : [énoncé]

(a) $y(x) = (2+\cos x)(C - \ln(2+\cos x))$

(b) $y(x) = \frac{C+\sin x}{1+\cos^2 x}$

(c) $y(x) = C\sin x + \cos x$

(d) $y(x) = C\mathrm{e}^{-1/\sin^2 x}$

Exercice 7 : [énoncé]

(a) $y(x) = \operatorname{ch}^2 x + 1 + C\operatorname{ch} x$

(b) $y(x) = (\ln(1+\operatorname{ch} x) + C)(1+\operatorname{ch} x)$

(c) $y(x) = C\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$

Exercice 8 : [énoncé]
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ de racines $\pm\mathrm{i}\omega$.
La solution générale homogène est donc $y(x) = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$
En introduisant l'équation complexe

$$z'' + \omega^2 z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}$$

et en considérant la partie réelle d'une solution particulière de celle-ci, on peut exprimer la solution générale

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x).$$

Les conditions initiales déterminent λ et μ

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega x).$$

Exercice 9 : [énoncé]
(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

de racines 1 et 2

Solution générale homogène :

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x} \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière à l'équation

$$z'' - 3z' + 2z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$$

de la forme $z(x) = \lambda \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$. On est amené à résoudre

$$(-2 - 6\mathrm{i})\lambda \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}.$$

On obtient

$$z(x) = \frac{3\mathrm{i} - 1}{20}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$$

et l'on peut donc proposer la solution particulière

$$y(x) = \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x).$$

La solution générale de (E) est alors

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{x} + \mu \mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{20}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

Exercice 10 : [énoncé]
Supposons f solution.
f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + y + \lambda = 0$ et donc

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \lambda.$$

De plus, une fonction de cette forme est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{C(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}} - \lambda$$

et donc une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\frac{C(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}} - \lambda = \lambda$$

d'où

$$\lambda = \frac{C(\mathrm{e}-1)}{2\mathrm{e}}.$$

Finalement, les solutions sont les fonctions données pas

$$\forall x \in [0\,;1], f(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \frac{C(\mathrm{e}-1)}{2\mathrm{e}}.$$

Exercice 11 : [énoncé]
Analyse : Supposons f est solution. On a

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x} - f(-x).$$

La fonction f' est dérivable et

$$f''(x) = \mathrm{e}^{x} + f'(-x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - f(x).$$

La fonction f est donc de l'équation différentielle $y'' + y = 2\operatorname{ch} x$
Après résolution

$$f(x) = \operatorname{ch} x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Synthèse : Une telle fonction est solution du problème si, et seulement si,

$$\operatorname{sh} x - C_1 \sin x + C_2 \cos x + \operatorname{ch} x + C_1 \cos x - C_2 \sin x = \mathrm{e}^{x}.$$

Ce qui donne $C_1 + C_2 = 0$.
Finalement les solutions du problème posé sont

$$f(x) = \operatorname{ch} x + C(\cos x - \sin x).$$

Exercice 12 : [énoncé]
Soit f une fonction solution (s'il en existe).
La dérivée de f apparaît dérivable et donc f est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -f'(2-x) = -f(x).$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant de solution générale

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

En injectant dans l'équation étudiée, une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\lambda = \lambda \sin 2 - \mu \cos 2 \\ \mu = \lambda \cos 2 + \mu \sin 2 \end{cases}$$

ce qui après résolution équivaut à l'équation

$$(1 + \sin 2)\lambda = (\cos 2)\mu.$$

En écrivant $\lambda = (\cos 2)\alpha$, on a $\mu = (1 + \sin 2)\alpha$ et la solution générale de l'équation étudiée est de la forme

$$f(x) = \alpha\big(\sin x + \cos(2-x)\big) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13 : [énoncé]
Soit f une solution.
Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) = 0$.
De plus

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^x f(h) + \mathrm{e}^h f(x) - f(x)}{h} = \mathrm{e}^x \frac{f(h)-f(0)}{h} + \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} f(x)$$

donc

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \mathrm{e}^x f'(0) + f(x).$$

Par suite f est dérivable en x et $f'(x) = f'(0)\mathrm{e}^x + f(x)$.
La fonction f est alors solution d'une équation différentielle de la forme
$y' = y + C\mathrm{e}^x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.
Après résolution, on obtient

$$f(x) = Cx\mathrm{e}^x.$$

Inversement, de telles fonctions sont solutions.