

Équations différentielles linéaires vectorielles

Exponentielles

Exercice 1 [03135] [Correction]

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Établir

$$\text{Ker}(e^u - \text{Id}_E) = \text{Ker } u \text{ et } \text{Im}(e^u - \text{Id}_E) = \text{Im } u$$

Exercice 2 [01185] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Établir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I + \frac{A}{n} \right)^n = \exp(A)$$

Exercice 3 [02416] [Correction]

Soient A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right)^n = \exp(A + B)$$

Exercice 4 [03094] [Correction]

On note

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et T^+ le sous-ensemble de T formé des matrices de coefficients diagonaux strictement positifs.

- (a) Soit $M \in T$. Déterminer les puissances de M . Calculer $\exp(M)$.
 (b) L'application $\exp: T \rightarrow T^+$ est-elle injective? surjective?

Exercice 5 [03451] [Correction]

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on note D l'endomorphisme de dérivation et T l'endomorphisme de translation définis par

$$D(P) = P'(X) \text{ et } T(P(X)) = P(X + 1)$$

Établir

$$\exp(D) = T$$

Exercice 6 [00340] [Correction]

Soit T une matrice réelle carrée d'ordre n antisymétrique. Établir que la matrice $\exp(T)$ est orthogonale.

Exercice 7 [02742] [Correction]

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de $\exp A$?

Exercice 8 [04179] [Correction]

On se donne $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ continue et telle que :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \varphi(s + t) = \varphi(s)\varphi(t)$$

- (a) On suppose dans cette question φ de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$$

En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(t) = \exp(tA)$ pour tout t réel.

- (b) Soit $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ intégrable et d'intégrale égale à 1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\theta(x) = 0$ pour tout $|x| > \alpha$. On pose, pour x réel,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x - t)\varphi(t) dt$$

Montrer que ψ est de classe \mathcal{C}^1 puis qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi(x) = \varphi(x)B$ pour tout réel x .

- (c) Déterminer φ .

Calculs d'exponentielles de matrices

Exercice 9 [02710] [Correction]

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sans diagonaliser la matrice A , déterminer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal et calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Évaluer $\exp(A)$.

Exercice 10 [02711] [Correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A . Calculer $\exp A$ et $\exp(A) \exp({}^t A)$.

Exercice 11 [02701] [Correction]

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer le polynôme minimal de A .
- (b) La matrice A est-elle diagonalisable? Si oui, la diagonaliser.
- (c) Calculer e^A .

Exercice 12 [02712] [Correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$$

Étudier la diagonalisabilité de A , déterminer les polynômes minimal et caractéristique de A , calculer $\exp A$. Proposer une généralisation en dimension n .

Exercice 13 [03215] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{Sp } A = \{-2, 1, 3\}$$

- (a) Exprimer A^n en fonction de A^2 , A et I_3 .
- (b) Calculer

$$\text{ch}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$$

Exercice 14 [02709] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} telle que $A^4 = I_n$. Déterminer $\exp(A)$.

Equation vectorielle d'ordre 1

Exercice 15 [00384] [Correction]

Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $a \circ b = b \circ a$.

En considérant pour $x_0 \in E$, l'application $t \mapsto (\exp(ta) \circ \exp(tb))x_0$, établir

$$\exp(a + b) = \exp(a) \circ \exp(b)$$

Exercice 16 [01320] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant

$$A^2 + I_{2n} = O_{2n}$$

Exprimer la solution générale de l'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t)$$

Exercice 17 [03670] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont aucune valeur propre n'est élément de $2i\pi\mathbb{Z}$.

- (a) Montrer que $e^A - I_n$ est inversible.

Soit $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une fonction continue et 1-périodique.

- (b) Montrer que l'équation

$$(E): X' = AX + B(t)$$

d'inconnue $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ possède une unique solution 1-périodique.

Exercice 18 [03921] [Correction]

- (a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p . Montrer que $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est une famille libre.

Exprimer

$$e^{t(\lambda I_n + N)}$$

- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant pour unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente. Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur \mathbb{R} si, et seulement si, λ est imaginaire pur et $A = \lambda I_n$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$(X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_m)^{n_m}$$

les λ_k étant deux à deux distincts. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à A . Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

En déduire l'existence d'une base de \mathbb{C}^n dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.

(d) Avec les notations de c). Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et que A est diagonalisable.

(e) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable.

Système différentiel d'ordre 1

Exercice 19 [00385] [Correction]

Résoudre le système différentiel réel suivant

$$\begin{cases} x' = \cos(t)x + \sin(t)y \\ y' = -\sin(t)x + \cos(t)y \end{cases}$$

Exercice 20 [00386] [Correction]

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2 \end{cases}$$

Exercice 21 [00387] [Correction]

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$$

Exercice 22 [00388] [Correction]

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - e^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + e^t \end{cases}$$

Système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants

Exercice 23 [00389] [Correction]

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Exercice 24 [00390] [Correction]

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + e^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Exercice 25 [00390] [Correction]

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$$

Exercice 26 [00391] [Correction]

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 27 [00392] [Correction]

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice 28 [02902] [Correction]

Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

Exercice 29 [04101] [\[Correction\]](#)

On étudie le système différentiel

$$(S): \begin{cases} x' = z - y \\ y' = x - z \\ z' = y - x \end{cases}$$

- (a) Ce système possède-t-il des solutions ?
- (b) Sans résoudre le système, montrer que pour tout réel t , le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ se situe à l'intersection d'un plan et d'une sphère.
- (c) Calculer A^3 et exprimer sous forme matricielle la solution générale du système (S) .

Exercice 30 [04102] [\[Correction\]](#)

Soit A une matrice non inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \mapsto X(t)$ une solution du système différentiel $X' = AX$. Montrer que les valeurs prises par la fonction $t \mapsto X(t)$ sont incluses dans un hyperplan affine.

Équations scalaires d'ordre n

Exercice 31 [04149] [\[Correction\]](#)

On étudie l'équation différentielle définie sur \mathbb{R}

$$(E): y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

avec a_0, a_1, \dots, a_{n-1} des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Soit x_0 un réel. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que les solutions non nulles de l'équation (E) s'annulent au plus $n - 1$ fois dans l'intervalle $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Posons $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = \tilde{0}$. On peut écrire

$$e^u = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k$$

Si $x \in \text{Ker } u$ alors

$$(e^u)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k(x) = x + 0 = x$$

et donc

$$x \in \text{Ker}(e^u - \text{Id}_E)$$

Inversement, supposons $x \in \text{Ker}(e^u - \text{Id}_E)$. On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} u^k(x) = 0$$

Si $u(x) \neq 0$ alors en posant $\ell \geq 1$ le plus grand entier tel que $u^\ell(x) \neq 0$ et en composant la relation précédente avec $u^{\ell-1}$ on obtient

$$u^\ell(x) = 0$$

ce qui est absurde.

On en déduit $u(x) = 0$ et donc $x \in \text{Ker } u$.

Ainsi

$$\text{Ker}(e^u - \text{Id}_E) = \text{Ker } u$$

Puisque

$$e^u - \text{Id}_E = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k = u \circ \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} u^{k-1} \right)$$

on a de façon immédiate

$$\text{Im}(e^u - \text{Id}_E) \subset \text{Im } u$$

En vertu de l'égalité des noyaux et de la formule du rang, on peut affirmer

$$\dim \text{Im}(e^u - \text{Id}_E) = \dim \text{Im } u$$

et donc conclure

$$\text{Im}(e^u - \text{Id}_E) = \text{Im } u$$

Exercice 2 : [énoncé]

On a

$$\left(I + \frac{A}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{A^k}{k!}$$

Posons $f_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par

$$f_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{A^k}{k!} \text{ si } k \leq n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$

On remarque que

$$\left(I + \frac{A}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_k(n)\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ donc $\|f_k\|_\infty \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ qui est terme général d'une série convergente. Il en découle que $\sum f_k$ converge normalement sur \mathbb{N} .

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(n) = \frac{A^k}{k!}$ donc par le théorème de la double limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I + \frac{A}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \exp(A)$$

Exercice 3 : [énoncé]

On a

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{A^k}{n^k} = I_p + \frac{1}{n}A + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) = I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi

$$\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right)^n = \left(I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n$$

Puisque I et $\frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right)$ commutent, on peut développer par la formule du binôme de Newton et obtenir :

$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} (A+B + o(1))^k$$

Posons $f_k: \mathbb{N}^* \mapsto \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par

$$f_k(n) = \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} (A+B + o(1))^k \text{ si } k \leq n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon}$$

On remarque que

$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$$

Montrons la convergence normale de la série des f_k .

Puisque $A+B+o(1) \rightarrow A+B$, la norme de $A+B+o(1)$ est bornée par un certain M .

On observe alors $\|f_k\|_\infty \leq \frac{1}{k!} M^k$ en choisissant une norme multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

La série $\sum f_k$ converge normale sur \mathbb{N}^* , cela permet de permuter limite et somme infinie.

Or, pour k fixé, $f_k(n) \rightarrow \frac{(A+B)^k}{k!}$ quand $n \rightarrow +\infty$, donc

$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k$$

Exercice 4 : [\[énoncé\]](#)

(a) Cas $a = c$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, M^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1} \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } \exp(M) = \begin{pmatrix} e^a & be^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$$

Cas $a \neq c$:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & \alpha_n \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_n = b(a^{n-1}c^0 + a^{n-2}c + \dots + a^0c^{n-1}) = b \frac{a^n - c^n}{a - c}$$

et

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} e^a & x \\ 0 & e^c \end{pmatrix} \text{ avec } x = \frac{b(e^a - e^c)}{a - c}$$

(b) Avec des notations immédiates, si $\exp(M) = \exp(M')$ alors par identification des coefficients diagonaux, on obtient $a = a'$ et $c = c'$.

Dans le cas $a = c$, l'identification du coefficient d'indice (1, 2) donne

$$be^a = b'e^{a'}$$

d'où $b = b'$.

Dans le cas $a \neq c$, la même identification donne

$$\frac{b(e^a - e^c)}{a - c} = \frac{b'(e^{a'} - e^{c'})}{a' - c'}$$

et à nouveau $b = b'$.

Ainsi l'application $\exp: T \rightarrow T^+$ est injective.

Considérons maintenant

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in T^+$$

Si $\alpha = \gamma$ alors pour $a = \ln \alpha$ et $b = \beta/\alpha$, on obtient $M \in T$ vérifiant $\exp(M) = N$.

Si $\alpha \neq \gamma$ alors pour $a = \ln \alpha$, $c = \ln \gamma$ et $b = \beta(a - c)/(\alpha - \gamma)$, on obtient $M \in T$ vérifiant $\exp(M) = N$.

Ainsi l'application $\exp: T \rightarrow T^+$ est surjective.

Exercice 5 : [\[énoncé\]](#)

Par la formule de Taylor adaptée aux polynômes

$$P(a+t) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} t^k$$

En déduit que l'égalité polynomiale

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(X)}{k!} 1^k$$

car les deux polynômes sont égaux pour une infinité de valeurs a .

On en déduit

$$\exp(D)(P) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k(P) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(X)}{k!} = P(X+1)$$

Exercice 6 : [\[énoncé\]](#)

Par continuité de l'application linéaire de transposition, on justifie

$${}^t \exp(T) = \exp({}^t T)$$

Par suite

$${}^t \exp(T) \exp(T) = \exp(-T) \exp(T)$$

Or T et $-T$ commutent donc

$$\exp(-T) \exp(T) = \exp(-T + T) = I_n$$

et on conclut.

Exercice 7 : [énoncé]

On a

$$t \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k \right) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} ({}^t A)^k$$

En passant à la limite et par continuité de l'application de transposition, on a

$${}^t(\exp A) = \exp({}^t A)$$

Puisque les matrices A et $-A$ commutent, on a

$${}^t(\exp A) \exp A = \exp(-A) \exp(A) = \exp(-A + A) = \exp(O_n) = I_n$$

Ainsi la matrice $\exp A$ est orthogonale.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Commençons par remarquer que $\varphi(0) = I_n$ car

$$\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0)^2 \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = I_n$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $s \neq 0$, on a

$$\frac{1}{s}(\varphi(s+t) - \varphi(t)) = \frac{1}{s}(\varphi(s) - \varphi(0))\varphi(t)$$

En passant à la limite quand s tend vers 0, on obtient

$$\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$$

Cette égalité s'apparente à une équation différentielle linéaire vectorielle à coefficient constant $x' = a(x)$ où l'inconnue x correspond à la fonction φ et l'endomorphisme a est la multiplication par la matrice $\varphi'(0)$. La résolution de cette équation donne

$$\varphi(t) = \exp(tA)\varphi(0) \quad \text{avec} \quad A = \varphi'(0)$$

En rappelant $\varphi(0) = I_n$, on obtient l'expression voulue de $\varphi(t)$.

(b) Posons $f(x, t) = \theta(x - t)\varphi(t)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} car nulle en dehors $[x - \alpha; x + \alpha]$. Ceci assure la définition de la fonction ψ .

La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \theta'(x - t)\varphi(t)$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a; a]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \underbrace{\sup_{s \in [-\alpha; \alpha]} |\theta'(s)| \varphi(t) \mathbf{1}_{[-(a+\alpha); a+\alpha]}(t)}_{\text{intégrable}}$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que ψ est de classe \mathcal{C}^1 .

Pour tous x et y réels

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x - t)\varphi(t) dt \stackrel{s=x-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(s)\varphi(x - s) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(s)\varphi(x)\varphi(-s) ds = \varphi(x)\psi(0) \end{aligned}$$

On obtient donc $\psi(x) = \varphi(x)B$ avec $B = \psi(0)$.

(c) Montrons qu'il est possible de se ramener à la situation où la matrice B est inversible auquel cas on établit que φ est de classe \mathcal{C}^1 et on conclut par la première question que $\varphi: t \mapsto \exp(tA)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\theta_n(x) = \frac{1}{n}\theta(nx)$$

La fonction θ_n réunit les conditions de la fonction θ précédente et

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_n(t)\varphi(-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\varphi(-t/n) dt$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\theta(t)\varphi(-t/n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta(t)\varphi(0)$$

et

$$\left\| \theta(t)\varphi(-t/n) \right\| \leq \underbrace{\max_{s \in [-\alpha; \alpha]} |\theta(s)| \max_{s \in [-\alpha; \alpha]} \|\varphi(s)\| \mathbf{1}_{[-\alpha; \alpha]}(t)}_{\text{intégrable}}$$

Par convergence dominée

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\varphi(-t/n) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\varphi(0) dt = \varphi(0) = I_n$$

Par continuité du déterminant, $\det(B_n)$ tend vers 1 et on peut affirmer que, pour n assez grand, B_n est inversible et on peut conclure.

Exercice 9 : [énoncé]

$\chi_A = X^3 - 2X$, $\pi_A = \chi_A$. On a donc

$$A^3 = 2A, A^{2k+1} = 2^k A \text{ et } A^{2k+2} = 2^k A^2 \text{ pour } k > 0$$

avec

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$\exp(A) = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} A + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{(2k)!} A^2 = I_3 + \frac{\text{sh}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} A + \frac{1}{2}(\text{ch}(\sqrt{2}) - 1)A^2$$

Exercice 10 : [énoncé]

$\chi_A = X(X^2 + 1)$, $\pi_A = X(X^2 + 1)$, $\exp(A) \exp(tA) = \exp(A) \exp(-A) = I_3$.
En calculant A^2, A^3, \dots on obtient

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $\chi_A = (X - 2)(X + 1)^2$,

$$E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit $\mu_A = (X - 2)(X + 1)$.

(b) Ci-dessus.

(c) Par division euclidienne $X^n = (X + 1)(X - 2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

donc

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3$$

puis

$$e^A = \frac{e^2 - e^{-1}}{3} A + \frac{2e^{-1} + e^2}{3} I_3$$

Exercice 12 : [énoncé]

$A^2 = O$ donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$.

Puisque $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable. $\pi_A = X^2$ et $\chi_A = -X^3$.

$$\exp(A) = I + A$$

L'étude se généralise pour $n \geq 3$ avec $A = (\omega^{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\omega \in U_n \setminus \{1\}$.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Puisque de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, la matrice A est diagonalisable et son polynôme minimal est

$$\Pi_A = (X + 2)(X - 1)(X - 3)$$

La division euclidienne de X^n par Π_A s'écrit

$$X^n = \Pi_A Q + R \text{ avec } \deg R < 3$$

Le polynôme R peut s'écrire

$$R(X) = a(X - 1)(X - 3) + b(X - 3) + c$$

et l'évaluation de la relation division euclidienne en $-2, 1$ et 3 donne

$$\begin{cases} 15a - 5b + c = (-2)^n \\ 2b + c = 1 \\ c = 3^n \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} \\ b = \frac{3^n - 1}{2} \\ c = 3^n \end{cases}$$

et enfin

$$R(X) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} X^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30} X + -\frac{3^n - (-2)^n - 5}{5}$$

En évaluant la relation de division euclidienne en A , on obtient

$$A^n = R(A) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} A^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30} A + \frac{-3^n + (-2)^n + 5}{5} I_3 \text{ et pour } t = 1 \text{ la relation demandée.}$$

(b) En vertu de ce qui précède

$$\text{ch } A = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{30} \left(3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \right)$$

et donc

$$\alpha = \frac{3 \text{ ch } 3 + 2 \text{ ch } 2 - 5 \text{ ch } 1}{30}$$

De même, on obtient

$$\beta = \frac{3 \text{ ch } 3 - 8 \text{ ch } 2 + 5 \text{ ch } 1}{30} \text{ et } \gamma = \frac{5 \text{ ch } 1 + \text{ch } 2 - \text{ch } 3}{5}$$

Exercice 14 : [\[énoncé\]](#)

Par convergence absolue, on peut écrire

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!} I_n + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)!} A + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+2)!} A^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k+3)!} A^3$$

ce qui donne

$$\exp(A) = \frac{\cos(1) + \text{ch}(1)}{2} I_n + \frac{\sin(1) + \text{sh}(1)}{2} A + \frac{\text{ch}(1) - \cos(1)}{2} A^2 + \frac{\text{sh}(1) - \sin(1)}{2} A^3$$

Exercice 15 : [\[énoncé\]](#)

$\varphi: t \mapsto \exp(ta) \circ \exp(tb)x_0$ est dérivable et vérifie $\varphi'(t) = (a+b)\varphi(t)$. En effet

$$(\exp(ta) \circ \exp(tb))' = a \circ \exp(ta) \circ \exp(tb) + \exp(ta) \circ b \circ \exp(tb)$$

or $b \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ b$ car a et b commutent donc

$$(\exp(ta) \circ \exp(tb))' = (a+b) \circ \exp(ta) \circ \exp(tb)$$

De plus $\varphi(0) = x_0$ donc $\varphi(t) = \exp(t(a+b))x_0$. Puisque ceci vaut pour tout x_0 :

$$\exp(t(a+b)) = \exp(ta) \circ \exp(tb)$$

Exercice 16 : [\[énoncé\]](#)

L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant. Sa solution générale peut être exprimée par une exponentielle

$$X(t) = \exp(tA)X(0)$$

avec

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

Or $A^2 = -I_{2n}$ donc, en séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs de cette série absolument convergente

$$\exp(tA) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} t^{2p} I_{2n} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1} A = \cos(t)I_{2n} + \sin(t)A$$

Ainsi la solution générale de l'équation étudiée est

$$X(t) = \cos(t)X(0) + \sin(t)AX(0)$$

Exercice 17 : [\[énoncé\]](#)

(a) La matrice complexe A est assurément trigonalisable et on peut donc écrire $A = PTP^{-1}$ avec

$$P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ et } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_k \in \text{Sp } A$$

On a alors

$$P^{-1}(e^A - I_n)P = e^T - I_n = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} - 1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} - 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall 1 \leq k \leq n, e^{\lambda_k} - 1 \neq 0 \text{ car } \lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}$$

On peut donc conclure $e^A - I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

(b) La solution générale de l'équation (E) est de la forme

$$X(t) = e^{tA}X_0 + \tilde{X}(t)$$

avec \tilde{X} solution particulière et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ colonne quelconque.

Analyse :

Soit X une solution 1-périodique. On a $X(1) = X(0)$ et donc après résolution

$$X_0 = (e^A - I_n)^{-1}(\tilde{X}(0) - \tilde{X}(1))$$

ce qui détermine entièrement la solution X .

Synthèse :

Considérons la fonction définie comme au terme de l'analyse ci-dessus. Elle est solution de l'équation (E) et vérifie $X(1) = X(0)$.

Considérons alors la fonction donnée par $Y(t) = X(t+1)$.

On vérifie que Y est encore solution de (E) (car la fonction B est périodique)

et puisque $Y(0) = X(1) = X(0)$, les fonctions X et Y sont égales car solutions d'un même problème de Cauchy.

Finalement, la fonction X est périodique.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Supposons

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \dots + \lambda_{p-1} N^{p-1} = O_n$$

En multipliant par N^{p-1} on obtient $\lambda_0 N^{p-1} = O_n$ car $N^p = O_n$. Or $N^{p-1} \neq O_n$ donc $\lambda_0 = 0$.

On montre de même successivement que $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_{p-1} = 0$.

On conclut que la famille $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est libre.

Puisque λI_n et N commutent, on a

$$e^{t(\lambda I_n + N)} = e^{t\lambda I_n} e^{tN} = e^{\lambda t} \left(I_n + \frac{t}{1!} N + \frac{t^2}{2!} N^2 + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} N^{p-1} \right)$$

(b) Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et possède une unique racine λ , on a donc

$$\chi_A(X) = (X - \lambda)^n$$

En vertu du théorème de Cayley Hamilton

$$N^n = (A - \lambda I_n)^n = O_n$$

La matrice N s'avère donc nilpotente.

Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les fonctions

$$t \mapsto X(t) = e^{tA}X(0) = e^{\lambda t} \cdot e^{tN}X(0)$$

Si N est nulle et $\lambda \in i\mathbb{R}$, il est clair que toutes les solutions sont bornées.

Inversement, supposons les solutions toutes bornées. En choisissant $X(0) \in \text{Ker } N \setminus \{O_n\}$, la solution

$$t \mapsto e^{tA}X(0) = e^{\lambda t}X(0)$$

est bornée sur \mathbb{R} et nécessairement $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Notons p l'indice de nilpotence de N et choisissons $X(0) \notin \text{Ker } N^{p-1}$. La solution

$$t \mapsto e^{\lambda t} \cdot e^{tN}X(0)$$

devant être bornée avec $|e^{\lambda t}| = 1$, la fonction

$$t \mapsto X(0) + tNX(0) + \dots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} N^{p-1}X(0)$$

est elle aussi bornée. Or $N^{p-1}X(0) \neq 0$ et donc cette solution ne peut pas être bornée si $p-1 > 0$.

On en déduit $p=1$ puis $N = O_n$.

(c) Les polynômes $(X - \lambda_k)^{n_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Par le théorème de Cayley Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, on obtient

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_k \text{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}$$

Une base adaptée à cette décomposition fournit une représentation matricielle Δ de f diagonale par blocs. Plus précisément, les blocs diagonaux sont de la forme

$$\lambda_k \text{Id}_{n_k} + N_k \text{ avec } N_k^{n_k} = O_{n_k}$$

(d) La matrice A est semblable à Δ et on peut donc écrire

$$A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible}$$

Les solutions de l'équation $X' = AX$ correspondent aux solutions de l'équation $Y' = \Delta Y$ via $Y = P^{-1}X$.

Les solutions de $X' = AX$ seront bornées si, et seulement si, celles de $Y' = \Delta Y$ le sont. En raisonnant par blocs et en exploitant le résultat du b), on peut affirmer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur \mathbb{R} si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et les N_k tous nuls (ce qui revient à dire que A est diagonalisable).

(e) Supposons A antisymétrique réelle. Puisque A et tA commutent

$${}^t(\overline{e^{tA}})e^{tA} = e^{tA+tA} = e^{O_n} = I_n$$

Soit $X: t \mapsto e^{tA}.X(0)$ une solution de l'équation $X' = AX$. On a

$$\|X(t)\|^2 = {}^t\overline{X(t)}X(t) = {}^t\overline{X(0)}{}^t\overline{(e^{tA})}e^{tA}X(0) = \|X(0)\|^2$$

Les solutions sont toutes bornées et donc A est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.

Exercice 19 : [énoncé]

Soit (x, y) solution sur \mathbb{R} .

On pose $z = x + iy$, on a $z'(t) = e^{-it}z(t)$ donc $z(t) = Ce^{ie^{-it}} = Ce^{i \cos t + \sin t}$ avec $C \in \mathbb{C}$.

En écrivant $C = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ on peut conclure

$$x(t) = e^{\sin(t)}(A \cos(\cos(t)) - B \sin(\cos(t)))$$

et

$$y(t) = e^{\sin(t)}(B \cos(\cos(t)) + A \sin(\cos(t)))$$

Vérification : il suffit de remonter les calculs.

Exercice 20 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur \mathbb{R} d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A(t)} = X^2 - (t+1)X + t.$$

$$\text{Sp}(A(t)) = \{1, t\}.$$

Si $t \neq 1$,

$$E_1(A(t)) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_t(A(t)) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ indépendant de t , $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec $D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ et

cette relation est aussi vraie pour $t = 1$.

En posant $Y = P^{-1}X$,

$$X' = A(t)X \iff Y' = D(t)Y$$

En écrivant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

on a

$$Y' = D(t)Y \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = ty_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1(t) = \lambda e^t \\ y_2(t) = \mu e^{t^2/2} \end{cases} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Puisque

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$X' = A(t)X \iff X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 2e^{t^2/2} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 21 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur \mathbb{R} d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

$$\chi_{A(t)} = X^2 - 2tX + (t^2 - 1), \text{ Sp}(A) = \{t+1, t-1\}.$$

$$E_{t+1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{t-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ indépendante de t , $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec

$$D(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, $X' = A(t)X \iff Y' = D(t)Y$.

En écrivant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$,

$$Y' = D(t)Y \iff \begin{cases} y_1' = (t+1)y_1 \\ y_2' = (t-1)y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = \lambda e^{(t^2+2t)/2} \\ y_2 = \mu e^{(t^2-2t)/2} \end{cases} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$X' = A(t)X \iff X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^{(t^2+2t)/2} \\ -e^{(t^2+2t)/2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^{(t^2-2t)/2} \\ -2e^{(t^2-2t)/2} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 22 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 défini sur \mathbb{R} d'équation matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

Commençons par résoudre l'équation homogène $X' = A(t)X$.

$$\chi_{A(t)} = (X-1)^2.$$

$$E_1(A(t)) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ indépendante de t , $A(t) = PT(t)P^{-1}$ avec $T(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En posant $Y = P^{-1}X$,

$$X' = A(t)X \iff Y' = T(t)Y$$

En écrivant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Y' = T(t)Y \iff \begin{cases} y_1' = y_1 + ty_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = \mu e^t + \frac{\lambda}{2} t^2 e^t \\ y_2 = \lambda e^t \end{cases}$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Puisque

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$X' = A(t)X \iff X(t) = \lambda \begin{pmatrix} (t^2/2)e^t \\ (1-t^2/2)e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

La famille (X_1, X_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène.

Cherchons une solution particulière.

$X(t) = \lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)$ avec λ et μ fonctions dérivables.

$$X' = A(t)X + B(t) \iff \lambda'(t) \begin{pmatrix} (t^2/2)e^t \\ (1-t^2/2)e^t \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$\lambda(t) = 0$ et $\mu(t) = -t$ conviennent

$X(t) = \begin{pmatrix} -te^t \\ te^t \end{pmatrix}$ est solution particulière.

Solution générale :

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} (t^2/2)e^t \\ (1-t^2/2)e^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -te^t \\ te^t \end{pmatrix}$$

Exercice 23 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\text{Sp}(A) = \{2, 3\}$ et

$$E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$,

$$X' = AX \iff Y' = DY$$

et

$$Y' = DY \iff Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{2t} \\ \mu e^{3t} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Finalement

$$X' = AX \iff X(t) = \lambda \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Exercice 24 : [énoncé]

C'est un système différentiel de taille 2 linéaire à coefficients constant d'équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Equation homogène : $X' = AX$.

$\chi_A = (X-1)(X-2)$, $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$, $E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

Posons $Y = P^{-1}X$. On a $Y' = P^{-1}X'$ et donc $X' = AX \iff Y' = DY$.

Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 e^t \\ y_2(t) = \lambda_2 e^{2t} \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$X = PY = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ donc

$$X' = AX \iff X(t) = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \\ 2\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$X_1(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ définissent un système fondamental de solutions.

Solution particulière :

$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t)$ avec λ_1, λ_2 fonctions dérivables.

$$X' = AX + B(t) \iff \lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t)$$

donc

$$X' = AX + B(t) \iff \begin{cases} 3\lambda_1'(t)e^t + \lambda_2'(t)e^{2t} = e^t \\ 2\lambda_1'(t)e^t + \lambda_2'(t)e^{2t} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1'(t) = 1 \\ \lambda_2'(t) = -2e^{-t} \end{cases}$$

$\lambda_1(t) = t$ et $\lambda_2(t) = 2e^{-t}$ conviennent

$X(t) = \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix}$ est solution particulière.

Solution générale :

$$X(t) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (3t+2)e^t \\ (2t+2)e^t \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

i.e.

$$\begin{cases} x_1(t) = 3\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} + (3t+2)e^t \\ x_2(t) = 2\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} + (2t+2)e^t \end{cases} \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 25 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle

$X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-3t} \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\text{Sp}(A) = \{5, -3\}$, $E_5(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = DY + C(t)$ avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^t + 2e^{-3t} \\ -e^t + 2e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient

$$Y' = DY + C(t) \iff Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{5t} - \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{16}e^{-3t} \\ \mu e^{-3t} - \frac{1}{16}e^t + \frac{1}{2}te^{-3t} \end{pmatrix}$$

puis

$$X' = AX + B(t) \iff X(t) = \lambda \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -te^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-3t} \\ -\frac{1}{8}e^t + \frac{1}{2}te^{-3t} - \frac{1}{16}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

On peut aussi procéder par variation des constantes après résolution séparée de l'équation homogène.

Exercice 26 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle

$X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\text{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\}$,

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, E_0(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient

$$X' = AX \iff Y' = DY$$

or

$$Y' = DY \iff Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu e^{2t} \\ \nu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

donc

$$X' = AX \iff X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \\ 3e^{2t} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 27 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(X) = -X^2(X + 1).$$

Après triangularisation, on a $A = PTP^{-1}$ pour

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \iff Y' = TY$.

$$Y' = TY \iff Y = \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu t + \nu \\ \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

La solution générale du système est donc

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 28 : [énoncé]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \chi_A = -(X - 2)(X^2 - X + 1).$$

La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable. La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :

$X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de A , complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.

Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de tA . $\text{Sp}({}^tA) = \text{Sp} A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \text{Vect} {}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation $2x + y - z = 0$ est stable par tA .

Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.

$$\text{Ainsi pour } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on a } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff Y' = BY$.

Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{2t} \\ y_2(t) = e^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X = PY$.

Exercice 29 : [énoncé]

- (a) (S) est un système différentiel linéaire homogène de taille 3, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 3.
- (b) Posons $m(t) = x(t) + y(t) + z(t)$. On constate $m'(t) = 0$ et donc le point M évolue sur un plan d'équation $x + y + z = a$. Posons $d(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)$. On constate $d'(t) = 0$ et donc le point M évolue sur une sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
- (c) Le système s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie $A^3 = -3A$ et on en déduit $A^{2n+1} = (-3)^n A$ et $A^{2n+2} = (-3)A^2$ puis

$$\exp(t.A) = I_n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} A + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n t^{2n+2}}{(2n+2)!} A^2$$

Ainsi

$$\exp(t.A) = I_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t)A + \frac{1}{3} (1 - \cos(\sqrt{3}t)) A^2$$

et la solution générale du système est

$$X(t) = X_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) AX_0 + \frac{1}{3} (1 - \cos(\sqrt{3}t)) A^2 X_0$$

Exercice 30 : [énoncé]

Puisque la matrice A n'est pas inversible, son rang est strictement inférieur à n et il existe donc un hyperplan H contenant l'image de A . Soit $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ une équation de cet hyperplan. Puisque les vecteurs $X'(t)$ sont des valeurs prises par A , celles-ci appartiennent à l'hyperplan précédent et donc

$$a_1 x_1'(t) + \dots + a_n x_n'(t) = 0$$

On en déduit

$$(a_1 x_1(t) + \dots + a_n x_n(t))' = 0$$

et donc

$$a_1 x_1(t) + \dots + a_n x_n(t) = C^{te}$$

Exercice 31 : [énoncé]

Par l'absurde, supposons qu'au contraire un tel α n'existe pas. En prenant $\alpha = 1/p > 0$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on peut introduire une fonction y_p non nulle, solution de l'équation (E) et s'annulant au moins n fois dans l'intervalle

$$I_p = [x_0 - 1/p; x_0 + 1/p].$$

Notons \mathcal{S} l'espace des solutions de l'équation (E). C'est un espace de dimension finie que l'on peut normer, par exemple, par la norme N définie sur \mathcal{S} par

$$N(f) = \sup_{[x_0-1; x_0+1]} |f| + \sup_{[x_0-1; x_0+1]} |f'| + \dots + \sup_{[x_0-1; x_0+1]} |f^{(n-1)}|$$

Cette norme a pour intérêt de traduire sur le segment $[x_0 - 1; x_0 + 1]$ la convergence uniforme d'une suite de fonctions ainsi que de la suite des dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$.

Quitte à considérer la fonction $y_p/N(y_p)$ au lieu de y_p , on peut supposer les fonctions y_p toutes de norme 1. La suite des fonctions (y_p) est alors une suite bornée de l'espace de dimension finie \mathcal{S} . Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente $(y_{\varphi(p)})$. La limite de celle-ci est une fonction y_∞ , non nulle et solution de (E). De plus, par construction, la suite de fonctions $(y_{\varphi(p)})$ converge uniformément vers y_∞ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ vers les dérivées respectives de y_∞ .

Par les annulations des fonctions $(y_{\varphi(p)})$, on peut introduire une suite $(x_{\varphi(p)})$ convergeant vers x_0 avec $y_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)}) = 0$. Par convergence uniforme, on obtient à la limite $y_\infty(x_0) = 0$.

Par application du théorème de Rolle, la fonction $y'_{\varphi(p)}$ s'annule au moins $n - 2$ fois sur l'intervalle $I_{\varphi(p)}$. On peut reprendre le raisonnement au-dessus et affirmer aussi $y'_\infty(x_0) = 0$.

Plus généralement, pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, la fonction $y^{(k)}_{\varphi(p)}$ s'annule au moins $n - k$ fois sur l'intervalle $I_{\varphi(p)}$ ce qui permet d'obtenir $y^{(k)}_\infty(x_0) = 0$.

La fonction y_∞ est alors solution du problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et des conditions initiales

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Or la fonction nulle est la seule solution de ce problème de Cauchy. C'est absurde car y_∞ n'est pas la fonction nulle.