Équations différentielles linéaires vectorielles

Exponentielles

Exercice 1 [03135] [Correction]
Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
Établir
$$\operatorname{Ker}\bigl(e^u - \operatorname{Id}_E\bigr) = \operatorname{Ker}(u) \quad\text{et}\quad \operatorname{Im}\bigl(e^u - \operatorname{Id}_E\bigr) = \operatorname{Im}(u).$$

Exercice 2 [01185] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Établir que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \exp(A).$$

Exercice 3 [02416] [Correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \exp(A+B).$$

Exercice 4 [03094] [Correction]
On note
$$T = \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$
et T^+ le sous-ensemble de T formé des matrices de coefficients diagonaux strictement positifs.

(a) Soit $M \in T$. Déterminer les puissances de M. Calculer $\exp(M)$.

(b) L'application $\exp\colon T \to T^+$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 5 [03451] [Correction]
Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on note D l'endomorphisme de dérivation et T l'endomorphisme de translation définis par
$$D(P) = P'(X) \text{ et } T(P(X)) = P(X+1).$$
Établir
$$\exp(D) = T.$$

Exercice 6 [00340] [Correction]
Soit T une matrice réelle carrée d'ordre n antisymétrique.
Établir que la matrice $\exp(T)$ est orthogonale.

Exercice 7 [02742] [Correction]
Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que peut-on dire de $\exp A$?

Exercice 8 [04179] [Correction]
On se donne $\varphi\colon \mathbb{R}\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue et telle que :
$$\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t).$$

(a) On suppose dans cette question φ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que
$$\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t).$$
En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(t) = \exp(tA)$ pour tout t réel.

(b) Soit $\theta \in \mathcal{C}^1\bigl(\mathbb{R},\mathbb{R}_+\bigr)$ intégrable et d'intégrale égale à 1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\theta(x) = 0$ pour tout $|x| > \alpha$. On pose, pour x réel,
$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ puis qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi(x) = \varphi(x)B$ pour tout réel x.

(c) Déterminer φ.

Calculs d'exponentielles de matrices

Exercice 9 [02710] [Correction]
On pose
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$
Sans diagonaliser la matrice A, déterminer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal et calculer A^k pour $k\in\mathbb{N}$.
Évaluer $\exp(A)$.

Exercice 10 [02711] [Correction]
Soit
$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$
dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A. Calculer $\exp A$ et $\exp(A)\exp({}^tA)$.

Exercice 11 [02701] [Correction]
Soient $a\in\mathbb{R}^*$ et
$$A=\begin{pmatrix}0&a&a^2\\1/a&0&a\\1/a^2&1/a&0\end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le polynôme minimal de A.

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

(c) Calculer e^A.

Exercice 12 [02712] [Correction]
Soit
$$A=\begin{pmatrix}1&j&j^2\\j&j^2&1\\j^2&1&j\end{pmatrix}.$$
Étudier la diagonalisabilité de A, déterminer les polynômes minimal et caractéristique de A, calculer $\exp A$. Proposer une généralisation en dimension n.

Exercice 13 [03215] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
$$\operatorname{Sp}A=\{-2,1,3\}.$$

(a) Exprimer A^n en fonction de A^2, A et I_3.

(b) Calculer
$$\operatorname{ch}(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^{2n}}{(2n)!}.$$

Exercice 14 [02709] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $A^4=I_n$. Déterminer $\exp(A)$.

Equation vectorielle d'ordre 1

Exercice 15 [00384] [Correction]
Soient $a,b\in\mathcal{L}(E)$ vérifiant $a\circ b=b\circ a$.
En considérant pour $x_0\in E$, l'application $t\mapsto(\exp(ta)\circ\exp(tb))x_0$, établir
$$\exp(a+b)=\exp(a)\circ\exp(b).$$

Exercice 16 [01320] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant
$$A^2+\mathrm{I}_{2n}=\mathrm{O}_{2n}.$$
Exprimer la solution générale de l'équation matricielle
$$X'(t)=AX(t).$$

Exercice 17 [03670] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont aucune valeur propre n'est élément de $2i\pi\mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $\mathrm{e}^A-\mathrm{I}_n$ est inversible.

Soit $B\colon\mathbb{R}\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ une fonction continue et 1-périodique.

(b) Montrer que l'équation
$$(E)\colon X'=AX+B(t)$$
d'inconnue $X\colon\mathbb{R}\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ possède une unique solution 1-périodique.

Exercice 18 [03921] [Correction]

(a) Soit $N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Montrer que $(I_n,N,N^2,\dots,N^{p-1})$ est une famille libre.
Exprimer
$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n+N)}.$$

(b) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant pour unique valeur propre $\lambda\in\mathbb{C}$. Montrer que $N=A-\lambda I_n$ est nilpotente.
Montrer que les solutions du système différentiel $X'=AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, λ est imaginaire pur et $A=\lambda I_n$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$(X-\lambda_1)^{n_1}\dots(X-\lambda_m)^{n_m}$$

les λ_k étant deux à deux distincts. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}(f-\lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}.$$

En déduire l'existence d'une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.

(d) Avec les notations de c). Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et que A est diagonalisable.

(e) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable.

Système différentiel d'ordre 1

Exercice 19 [00385] [Correction]
Résoudre le système différentiel réel suivant

$$\begin{cases} x' = \cos(t)x + \sin(t)y \\ y' = -\sin(t)x + \cos(t)y. \end{cases}$$

Exercice 20 [00386] [Correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2. \end{cases}$$

Exercice 21 [00387] [Correction]
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + (t-3)x_2. \end{cases}$$

Exercice 22 [00388] [Correction]
Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - \mathrm{e}^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + \mathrm{e}^t. \end{cases}$$

Exercice 23 [05098] [Correction]

(a) Déterminer les fonctions réelles solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel

$$(\Sigma) : \begin{cases} x' = -z \\ y' = x + z \\ z' = -x - y. \end{cases}$$

(b) À quelle condition sur $\big(x(0), y(0), z(0)\big)$ les solutions du système (Σ) sont-elles bornées sur $[0\,;+\infty[$?

Système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants

Exercice 24 [00389] [Correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Exercice 25 [03490] [Correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 3x_2 + \mathrm{e}^t \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2. \end{cases}$$

Exercice 26 [00390] [Correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t}. \end{cases}$$

Exercice 27 [00391] [Correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

Exercice 28 [00392] [Correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$$

Exercice 29 [02902] [Correction]
Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z. \end{cases}$$

Exercice 30 [04101] [Correction]
On étudie le système différentiel

$$(S)\colon \begin{cases} x' = z - y \\ y' = x - z \\ z' = y - x. \end{cases}$$

(a) Ce système possède-t-il des solutions ?

(b) Sans résoudre le système, montrer que pour tout réel t, le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ se situe à l'intersection d'un plan et d'une sphère.

(c) Calculer A^3 et exprimer sous forme matricielle la solution générale du système (S).

Exercice 31 [04102] [Correction]
Soient A une matrice non inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $t \mapsto X(t)$ une solution du système différentiel $X' = AX$. Montrer que les valeurs prises par la fonction $t \mapsto X(t)$ sont incluses dans un hyperplan affine.

Exercice 32 [05095] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On dit que le système différentiel $(\Sigma)\colon X' = AX$ est *asymptotiquement stable* lorsque toutes ses solutions sont de limite nulle[1] en $+\infty$.
Montrer que le système (Σ) est asymptotiquement stable si, et seulement si, $\operatorname{tr}(A) < 0$ et $\det(A) > 0$.

1. Autrement dit, lorsque X désigne une colonne solution de (Σ), on vérifie que $X(t)$ tend vers ${}^t(0 \quad 0)$ quand t croît vers $+\infty$.

Exercice 33 [05105] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace strictement positive et $t \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une solution sur $[0\,;+\infty[$ du système différentiel $X' = AX$.
On suppose que la fonction X est bornée, montrer qu'il existe une ligne $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $LX(t) = 0$ pour tout $t \in [0\,;+\infty[$.

Équations scalaires d'ordre n

Exercice 34 [04149] [Correction]
On étudie l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$

$$(E)\colon y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit x_0 un réel. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que les solutions non nulles de l'équation (E) s'annulent au plus $n-1$ fois dans l'intervalle $[x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha]$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Posons $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n = \tilde{0}$. On peut écrire

$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k.$$

Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$ alors

$$(\mathrm{e}^u)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k(x) = x + 0 = x$$

et donc

$$x \in \mathrm{Ker}\big(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E\big).$$

Inversement, supposons $x \in \mathrm{Ker}\big(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E\big)$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} u^k(x) = 0.$$

Si $u(x) \neq 0$ alors en posant $\ell \geq 1$ le plus grand entier tel que $u^\ell(x) \neq 0$ et en composant la relation précédente avec $u^{\ell-1}$ on obtient

$$u^\ell(x) = 0$$

ce qui est absurde. On en déduit $u(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$.
Ainsi,

$$\mathrm{Ker}\big(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E\big) = \mathrm{Ker}(u).$$

Puisque

$$\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} u^k = u \circ \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} u^{k-1} \right)$$

on a de façon immédiate

$$\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E\big) \subset \mathrm{Im}(u).$$

En vertu de l'égalité des noyaux et de la formule du rang, on peut affirmer

$$\dim \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E\big) = \dim \mathrm{Im}(u)$$

et donc conclure

$$\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^u - \mathrm{Id}_E\big) = \mathrm{Im}(u).$$

Exercice 2 : [énoncé]
On a

$$\left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{A^k}{k!}.$$

Posons $f_k : \mathbb{N} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par

$$f_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!n^k} \frac{A^k}{k!} \text{ si } k \leq n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon.}$$

On remarque que

$$\left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n).$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\big\|f_k(n)\big\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ donc $\|f_k\|_\infty \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ qui est terme général d'une série convergente. Il en découle que $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{N}$.
Or $\lim_{n\to+\infty} f_k(n) = \frac{A^k}{k!}$ donc par le théorème de la double limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \exp(A).$$

Exercice 3 : [énoncé]
On a

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{A^k}{n^k} = I_p + \frac{1}{n} A + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) = I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ainsi

$$\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \left(I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Puisque I et $\frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ commutent, on peut développer par la formule du binôme de Newton et obtenir :

$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} (A + B + \mathrm{o}(1))^k.$$

Posons $f_k\colon \mathbb{N}^* \mapsto \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par

$$f_k(n) = \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}(A+B+\mathrm{o}(1))^k \text{ si } k \le n \text{ et } f_k(n) = 0 \text{ sinon.}$$

On remarque que

$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n).$$

Montrons la convergence normale de la série des f_k.
Puisque $A+B+\mathrm{o}(1) \to A+B$, la norme de $A+B+\mathrm{o}(1)$ est bornée par un certain M.
On observe alors $\|f_k\|_\infty \le \frac{1}{k!}M^k$ en choisissant une norme multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
La série $\sum f_k$ converge normale sur $\mathbb{N}^*$, cela permet de permuter limite et somme infinie.
Or, pour k fixé, $f_k(n) \to \frac{(A+B)^k}{k!}$ quand $n \to +\infty$, donc

$$\left(I + \frac{1}{n}(A+B) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k.$$

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Cas $a = c$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}, M^n = \begin{pmatrix} a^n & nba^{n-1}\\ 0 & a\end{pmatrix} \text{ et } \exp(M) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & b\mathrm{e}^a\\ 0 & \mathrm{e}^a\end{pmatrix}.$$

Cas $a \ne c$:

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & \alpha_n\\ 0 & c^n\end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_n = b\left(a^{n-1}c^0 + a^{n-2}c + \cdots + a^0c^{n-1}\right) = b\frac{a^n - c^n}{a-c}$$

et

$$\exp(M) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & x\\ 0 & \mathrm{e}^c\end{pmatrix} \text{ avec } x = \frac{b(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^c)}{a-c}.$$

(b) Avec des notations immédiates, si $\exp(M) = \exp(M')$ alors par identification des coefficients diagonaux, on obtient $a = a'$ et $c = c'$.
Dans le cas $a = c$, l'identification du coefficient d'indice $(1,2)$ donne

$$b\mathrm{e}^a = b'\mathrm{e}^{a'}$$

d'où $b = b'$.
Dans le cas $a \ne c$, la même identification donne

$$\frac{b(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^c)}{a-c} = \frac{b'(\mathrm{e}^{a'} - \mathrm{e}^{c'})}{a'-c'}$$

et à nouveau $b = b'$.
Ainsi l'application $\exp\colon T \to T^+$ est injective.
Considérons maintenant

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix} \in T^+.$$

Si $\alpha = \gamma$ alors pour $a = \ln\alpha$ et $b = \beta/\alpha$, on obtient $M \in T$ vérifiant $\exp(M) = N$.
Si $\alpha \ne \gamma$ alors pour $a = \ln\alpha$, $c = \ln\gamma$ et $b = \beta(a-c)/(\alpha-\gamma)$, on obtient $M \in T$ vérifiant $\exp(M) = N$.
Ainsi l'application $\exp\colon T \to T^+$ est surjective.

Exercice 5 : [énoncé]
Par la formule de Taylor adaptée aux polynômes

$$P(a+t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}t^k.$$

En déduit que l'égalité polynomiale

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}1^k$$

car les deux polynômes sont égaux pour une infinité de valeurs a.
On en déduit

$$\exp(D)(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D^k(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!} = P(X+1).$$

Exercice 6 : [énoncé]
Par continuité de l'application linéaire de transposition, on justifie

$${}^t\exp(T) = \exp({}^tT).$$

Par suite

$${}^t\exp(T)\exp(T) = \exp(-T)\exp(T).$$

Or T et $-T$ commutent donc

$$\exp(-T)\exp(T) = \exp(-T+T) = I_n$$

et on conclut.

Exercice 7 : [énoncé]

On a

$$^t\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}A^k\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left({}^tA\right)^k.$$

En passant à la limite et par continuité de l'application de transposition, on a

$$^t(\exp A) = \exp({}^tA).$$

Puisque les matrices A et $-A$ commutent, on a

$$^t(\exp A)\exp A = \exp(-A)\exp(A) = \exp(-A+A) = \exp(\mathrm{O}_n) = \mathrm{I}_n.$$

Ainsi la matrice $\exp A$ est orthogonale.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Commençons par remarquer que $\varphi(0) = \mathrm{I}_n$ car

$$\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)^2 \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \mathrm{I}_n.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $s \neq 0$, on a

$$\frac{1}{s}\big(\varphi(s+t) - \varphi(t)\big) = \frac{1}{s}\big(\varphi(s) - \varphi(0)\big)\varphi(t).$$

En passant à la limite quand s tend vers 0, on obtient

$$\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t).$$

Cette égalité s'apparente à une équation différentielle linéaire vectorielle à coefficient constant $x' = a(x)$ où l'inconnue x correspond à la fonction φ et l'endomorphisme a est la multiplication par la matrice $\varphi'(0)$. La résolution de cette équation donne

$$\varphi(t) = \exp(tA)\varphi(0) \quad \text{avec} \quad A = \varphi'(0).$$

En rappelant $\varphi(0) = \mathrm{I}_n$, on obtient l'expression voulue de $\varphi(t)$.

(b) Posons $f(x,t) = \theta(x-t)\varphi(t)$ définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car nulle en dehors $[x-\alpha\,;x+\alpha]$. Ceci assure la définition de la fonction ψ.

La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \theta'(x-t)\varphi(t).$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a\,;a]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \underbrace{\sup_{s\in[-\alpha;\alpha]}|\theta'(s)|\varphi(t)\mathbf{1}_{[-(a+\alpha);a+\alpha]}(t)}_{\text{intégrable}}.$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tous x et y réels,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{s=x-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(s)\varphi(x-s)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(s)\varphi(x)\varphi(-s)\,\mathrm{d}s = \varphi(x)\psi(0).\end{aligned}$$

On obtient donc $\psi(x) = \varphi(x)B$ avec $B = \psi(0)$.

(c) Montrons qu'il est possible de se ramener à la situation où la matrice B est inversible auquel cas on établit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'on conclut par la première question que $\varphi\colon t \mapsto \exp(tA)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\theta_n(x) = \frac{1}{n}\theta(nx).$$

La fonction θ_n réunit les conditions de la fonction θ précédente et

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta_n(t)\varphi(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\varphi(-t/n)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\theta(t)\varphi(-t/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta(t)\varphi(0)$$

et

$$\big\|\theta(t)\varphi(-t/n)\big\| \leq \underbrace{\max_{s\in[-\alpha;\alpha]}\big|\theta(s)\big|\max_{s\in[-\alpha;\alpha]}\big\|\varphi(s)\big\|\mathbf{1}_{[-\alpha;\alpha]}(t)}_{\text{intégrable}}.$$

Par convergence dominée

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\varphi(-t/n)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0) = \mathrm{I}_n.$$

Par continuité du déterminant, $\det(B_n)$ tend vers 1 et l'on peut affirmer que, pour n assez grand, B_n est inversible et l'on peut conclure.

Exercice 9 : [énoncé]
$\chi_A = X^3 - 2X$, $\pi_A = \chi_A$. On a donc

$$A^3 = 2A, A^{2k+1} = 2^k A \text{ et } A^{2k+2} = 2^k A^2 \text{ pour } k > 0$$

avec

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\exp(A) = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!}A + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k-1}}{(2k)!}A^2 = I_3 + \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}A + \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\sqrt{2})-1)A^2.$$

Exercice 10 : [énoncé]
$\chi_A = X(X^2+1)$, $\pi_A = X(X^2+1)$, $\exp(A)\exp({}^tA) = \exp(A)\exp(-A) = I_3$.
En calculant $A^2, A^3, \dots$ on obtient

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos 1 & -\sin 1\\ 0 & \sin 1 & \cos 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$,

$$E_2(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} a^2\\ a\\ 1\end{pmatrix} \text{ et } E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -a^2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a\\ a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

On en déduit $\mu_A = (X-2)(X+1)$.

(b) Ci-dessus.

(c) Par division euclidienne $X^n = (X+1)(X-2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

donc

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}I_3$$

puis

$$\mathrm{e}^A = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}}{3}A + \frac{2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2}{3}I_3.$$

Exercice 12 : [énoncé]
$A^2 = O$ donc $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$.
Puisque $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable. $\pi_A = X^2$ et $\chi_A = -X^3$.

$$\exp(A) = I + A.$$

L'étude se généralise pour $n \geq 3$ avec $A = (\omega^{i+j-2})_{1\leq i,j\leq n}$ et $\omega \in U_n \setminus \{1\}$.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Puisque de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, la matrice A est diagonalisable et son polynôme minimal est

$$\Pi_A = (X+2)(X-1)(X-3).$$

La division euclidienne de X^n par Π_A s'écrit

$$X^n = \Pi_A Q + R \text{ avec } \deg R < 3.$$

Le polynôme R peut s'écrire

$$R(X) = a(X-1)(X-3) + b(X-3) + c$$

et l'évaluation de la relation division euclidienne en -2, 1 et 3 donne

$$\begin{cases} 15a - 5b + c = (-2)^n\\ 2b + c = 1\\ c = 3^n\end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = \frac{3^{n+1}-(-2)^{n+1}-5}{30} \\ b = \frac{3^n-1}{2} \\ c = 3^n \end{cases}$$

et enfin

$$R(X) = \frac{3^{n+1}-(-2)^{n+1}-5}{30}X^2 + \frac{3^{n+1}+(-2)^{n+3}+5}{30}X + -\frac{3^n-(-2)^n-5}{5}.$$

En évaluant la relation de division euclidienne en A, on obtient

$$A^n = R(A) = \frac{3^{n+1}-(-2)^{n+1}-5}{30}A^2 + \frac{3^{n+1}+(-2)^{n+3}+5}{30}A + \frac{-3^n+(-2)^n+5}{5}I_3$$

(b) En vertu de ce qui précède

$$\operatorname{ch} A = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{30}\left(3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{2n}}{(2n!)} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!} - 5\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\right)$$

et donc

$$\alpha = \frac{3\operatorname{ch}3 + 2\operatorname{ch}2 - 5\operatorname{ch}1}{30}.$$

De même, on obtient

$$\beta = \frac{3\operatorname{ch}3 - 8\operatorname{ch}2 + 5\operatorname{ch}1}{30} \text{ et } \gamma = \frac{5\operatorname{ch}1 + \operatorname{ch}2 - \operatorname{ch}3}{5}.$$

Exercice 14 : [énoncé]
Par convergence absolue, on peut écrire

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k)!}I_n + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+1)!}A + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+2)!}A^2 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+3)!}A^3$$

ce qui donne

$$\exp(A) = \frac{\cos(1)+\operatorname{ch}(1)}{2}I_n + \frac{\sin(1)+\operatorname{sh}(1)}{2}A + \frac{\operatorname{ch}(1)-\cos(1)}{2}A^2 + \frac{\operatorname{sh}(1)-\sin(1)}{2}A^3.$$

Exercice 15 : [énoncé]
$\varphi\colon t \mapsto \exp(ta)\circ\exp(tb)x_0$ est dérivable et vérifie $\varphi'(t) = (a+b)\varphi(t)$. En effet

$$\big(\exp(ta)\circ\exp(tb)\big)' = a\circ\exp(ta)\circ\exp(tb) + \exp(ta)\circ b\circ\exp(tb)$$

or $b\circ\exp(ta) = \exp(ta)\circ b$ car a et b commutent donc

$$\big(\exp(ta)\circ\exp(tb)\big)' = (a+b)\circ\exp(ta)\circ\exp(tb).$$

De plus $\varphi(0) = x_0$ donc $\varphi(t) = \exp(t(a+b))x_0$. Puisque ceci vaut pour tout x_0 :

$$\exp(t(a+b)) = \exp(ta)\circ\exp(tb)$$

et pour $t = 1$ la relation demandée.

Exercice 16 : [énoncé]
L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant. Sa solution générale peut être exprimée par une exponentielle

$$X(t) = \exp(tA)X(0)$$

avec

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k.$$

Or $A^2 = -\mathrm{I}_{2n}$ donc, en séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs de cette série absolument convergente

$$\exp(tA) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}t^{2p}\mathrm{I}_{2n} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}t^{2p+1}A = \cos(t)\mathrm{I}_{2n} + \sin(t)A.$$

Ainsi la solution générale de l'équation étudiée est

$$X(t) = \cos(t)X(0) + \sin(t)AX(0).$$

Exercice 17 : [énoncé]

(a) La matrice complexe A est assurément trigonalisable et l'on peut donc écrire $A = PTP^{-1}$ avec

$$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad\text{et}\quad T = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix} \text{ où } \lambda_k \in \operatorname{Sp} A.$$

On a alors

$$P^{-1}\left(\mathrm{e}^A - \mathrm{I}_n\right)P = \mathrm{e}^T - \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1}-1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \mathrm{e}^{\lambda_n}-1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\forall 1 \le k \le n, \mathrm{e}^{\lambda_k} - 1 \neq 0 \quad \text{car} \quad \lambda_k \notin 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}.$$

On peut donc conclure $\mathrm{e}^A - \mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(b) La solution générale de l'équation (E) est de la forme

$$X(t) = \mathrm{e}^{tA}X_0 + \tilde{X}(t)$$

avec $\tilde{X}$ solution particulière et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ colonne quelconque.
Analyse: Soit X une solution 1-périodique. On a $X(1) = X(0)$ et donc après résolution

$$X_0 = \left(\mathrm{e}^A - \mathrm{I}_n\right)^{-1}\left(\tilde{X}(0) - \tilde{X}(1)\right)$$

ce qui détermine entièrement la solution X.

Synthèse: Considérons la fonction définie comme au terme de l'analyse ci-dessus. Elle est solution de l'équation (E) et vérifie $X(1) = X(0)$.
Considérons alors la fonction donnée par $Y(t) = X(t+1)$.
On vérifie que Y est encore solution de (E) (car la fonction B est périodique) et puisque $Y(0) = X(1) = X(0)$, les fonctions X et Y sont égales car solutions d'un même problème de Cauchy.
Finalement, la fonction X est périodique.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Supposons

$$\lambda_0 I_n + \lambda_1 N + \cdots + \lambda_{p-1}N^{p-1} = O_n.$$

En multipliant par N^{p-1} on obtient $\lambda_0 N^{p-1} = O_n$ car $N^p = O_n$. Or $N^{p-1} \neq O_n$ donc $\lambda_0 = 0$.
On montre de même successivement que $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{p-1} = 0$.
On conclut que la famille $(I_n, N, N^2, \ldots, N^{p-1})$ est libre.
Puisque λI_n et N commutent, on a

$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n + N)} = \mathrm{e}^{t\lambda I_n}\mathrm{e}^{tN} = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(I_n + \frac{t}{1!}N + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}N^{p-1}\right).$$

(b) Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et possède une unique racine λ, on a donc

$$\chi_A(X) = (X-\lambda)^n.$$

En vertu du théorème de Cayley Hamilton

$$N^n = (A - \lambda I_n)^n = O_n.$$

La matrice N s'avère donc nilpotente.
Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les fonctions

$$t \mapsto X(t) = \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{tN}X(0).$$

Si N est nulle et $\lambda \in i\mathbb{R}$, il est clair que toutes les solutions sont bornées.
Inversement, supposons les solutions toutes bornées. En choisissant $X(0) \in \operatorname{Ker} N \setminus \{O_n\}$, la solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t}X(0)$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ et nécessairement $\lambda \in i\mathbb{R}$.
Notons p l'indice de nilpotence de N et choisissons $X(0) \notin \operatorname{Ker} N^{p-1}$. La solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{tN}X(0)$$

devant être bornée avec $\left|\mathrm{e}^{\lambda t}\right| = 1$, la fonction

$$t \mapsto X(0) + tNX(0) + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)}N^{p-1}X(0)$$

est elle aussi bornée. Or $N^{p-1}X(0) \neq 0$ et donc cette solution ne peut pas être bornée si $p-1 > 0$.
On en déduit $p = 1$ puis $N = O_n$.

(c) Les polynômes $(X-\lambda_k)^{n_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Par le théorème de Cayley Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, on obtient

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}.$$

Une base adaptée à cette décomposition fournit une représentation matricielle Δ de f diagonale par blocs. Plus précisément, les blocs diagonaux sont de la forme

$$\lambda_k \mathrm{Id}_{n_k} + N_k \text{ avec } N_k^{n_k} = O_{n_k}.$$

(d) La matrice A est semblable à Δ et on peut donc écrire

$$A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible.}$$

Les solutions de l'équation $X' = AX$ correspondent aux solutions de l'équation $Y' = \Delta Y$ via $Y = P^{-1}X$.
Les solutions de $X' = AX$ seront bornées si, et seulement si, celles de $Y' = \Delta Y$ le sont. En raisonnant par blocs et en exploitant le résultat du b), on peut affirmer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et les N_k tous nuls (ce qui revient à dire que A est diagonalisable).

(e) Supposons A antisymétrique réelle. Puisque A et ${}^tA$ commutent

$$^t\overline{(\mathrm{e}^{tA})}\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\,{}^tA+tA} = \mathrm{e}^{O_n} = I_n.$$

Soit $X : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}.X(0)$ une solution de l'équation $X' = AX$. On a

$$\left\|X(t)\right\|^2 = {}^t\overline{X(t)}X(t) = {}^t\overline{X(0)}{}^t\overline{(\mathrm{e}^{tA})}\mathrm{e}^{tA}X(0) = \left\|X(0)\right\|^2.$$

Les solutions sont toutes bornées et donc A est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.

Exercice 19 : [énoncé]
Soit (x, y) solution sur $\mathbb{R}$.
On pose $z = x + \mathrm{i}y$, on a $z'(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}z(t)$ donc $z(t) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos t+\sin t}$ avec $C \in \mathbb{C}$.
En écrivant $C = A + \mathrm{i}B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ on peut conclure

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}(A\cos(\cos(t)) - B\sin(\cos(t))$$

et

$$y(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}(B\cos(\cos(t)) + A\sin(\cos(t)).$$

Vérification : il suffit de remonter les calculs.

Exercice 20 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$\chi_{A(t)} = X^2 - (t+1)X + t$.
$\mathrm{Sp}\big(A(t)\big) = \{1, t\}$.
Si $t \neq 1$,

$$E_1(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_t(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ indépendant de t, $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec $D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ et cette relation est aussi vraie pour $t = 1$.
En posant $Y = P^{-1}X$,

$$X' = A(t)X \iff Y' = D(t)Y.$$

En écrivant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

on a

$$Y' = D(t)Y \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = ty_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1(t) = \lambda\mathrm{e}^t \\ y_2(t) = \mu\mathrm{e}^{t^2/2} \end{cases} \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Puisque

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$X' = A(t)X \iff X(t) = \lambda\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2/2} \\ 2\mathrm{e}^{t^2/2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 21 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec
$A(t) = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.
$\chi_{A(t)} = X^2 - 2tX + (t^2 - 1)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{t+1, t-1\}$.
$E_{t+1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_{t-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ indépendante de t, $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec
$D(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$.
En posant $Y = P^{-1}X$, $X' = A(t)X \iff Y' = D(t)Y$.

En écrivant $Y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}$,

$$Y'=D(t)Y \iff \begin{cases}y_1'=(t+1)y_1\\y_2'=(t-1)y_2\end{cases} \iff \begin{cases}y_1=\lambda\mathrm{e}^{(t^2+2t)/2}\\y_2=\mu\mathrm{e}^{(t^2-2t)/2}\end{cases}$$

avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

$$X=PY=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},$$

puis

$$X'=A(t)X \iff X(t)=\lambda\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{(t^2+2t)/2}\\-\mathrm{e}^{(t^2+2t)/2}\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{(t^2-2t)/2}\\-2\mathrm{e}^{(t^2-2t)/2}\end{pmatrix}$$

avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Exercice 22 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X'=A(t)X+B(t)$ avec

$$A(t)=\begin{pmatrix}1+t&t\\-t&1-t\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B(t)=\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^t\end{pmatrix}.$$

Commençons par résoudre l'équation homogène $X'=A(t)X$.
$\chi_{A(t)}=(X-1)^2$.
$E_1(A(t))=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
Pour $P=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$ indépendante de t, $A(t)=PT(t)P^{-1}$ avec $T(t)=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$.
En posant $Y=P^{-1}X$,

$$X'=A(t)X \iff Y'=T(t)Y.$$

En écrivant $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$,

$$Y'=T(t)Y \iff \begin{cases}y_1'=y_1+ty_2\\y_2'=y_2\end{cases} \iff \begin{cases}y_1=\mu\mathrm{e}^t+\frac{\lambda}{2}t^2\mathrm{e}^t\\y_2=\lambda\mathrm{e}^t\end{cases}$$

avec $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.

Puisque

$$X=PY=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

on obtient

$$X'=A(t)X \iff X(t)=\lambda\begin{pmatrix}(t^2/2)\mathrm{e}^t\\(1-t^2/2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\-\mathrm{e}^t\end{pmatrix}.$$

La famille (X_1,X_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène.
Cherchons une solution particulière de la forme $X(t)=\lambda(t)X_1(t)+\mu(t)X_2(t)$ avec λ et μ fonctions dérivables.

$$X'=A(t)X+B(t) \iff \lambda'(t)\begin{pmatrix}(t^2/2)\mathrm{e}^t\\(1-t^2/2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix}+\mu'(t)\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\-\mathrm{e}^t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

$\lambda(t)=0$ et $\mu(t)=-t$ conviennent et $X(t)=\begin{pmatrix}-t\mathrm{e}^t\\t\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$ est solution particulière.
Solution générale :

$$X(t)=\lambda\begin{pmatrix}(t^2/2)\mathrm{e}^t\\(1-t^2/2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\-\mathrm{e}^t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-t\mathrm{e}^t\\t\mathrm{e}^t\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

(a) (Σ) est un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 d'équation matricielle $X'=AX$ avec

$$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad X(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big).$$

L'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 3.
Le polynôme caractéristique de la matrice A est
$\chi_A(X)=(X-1)\big(X^2+X+1\big)$, les valeurs propres complexes de A sont 1, $j=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2=\bar{j}$, les sous-espaces propres associés sont

$$E_1(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\},E_j(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\j^2-1\\-j\end{pmatrix}\right\}\text{ et }E_{j^2}(A)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\j-1\\-j^2\end{pmatrix}\right\}$$

La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et l'on peut écrire $A=PDP^{-1}$ avec

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&j^2-1&j-1\\-1&-j&-j^2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}.$$

La résolution du système différentiel $Z' = AZ$ d'inconnue Z à valeurs complexes conduit à la solution générale

$$Z(t) = P\begin{pmatrix}\lambda e^t\\ \mu e^{jt}\\ \nu e^{j^2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda e^t + \mu e^{jt} + \nu e^{j^2t}\\ \mu(j^2-1)e^{jt} + \nu(j-1)e^{j^2t}\\ -\lambda e^t - \mu j e^{jt} - \nu j^2 e^{j^2t}\end{pmatrix}$$

$$= \lambda\underbrace{\begin{pmatrix}e^t\\ 0\\ -e^t\end{pmatrix}}_{=Z_1(t)} + \mu\underbrace{\begin{pmatrix}e^{jt}\\ (j^2-1)e^{jt}\\ -je^{jt}\end{pmatrix}}_{=Z_2(t)} + \nu\underbrace{\begin{pmatrix}e^{j^2t}\\ (j-1)e^{j^2t}\\ -j^2e^{j^2t}\end{pmatrix}}_{=\overline{Z_2(t)}} \quad\text{avec}\quad (\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{C}^3.$$

On extrait[2] de la résolution complexe trois solutions réelles linéairement indépendantes.

Les colonnes complexes Z_1, Z_2 et $\overline{Z_2}$ forment une base de l'espace des solutions complexes de l'équation $Z' = AZ$. Or on peut écrire

$$Z_2 = \operatorname{Re}(Z_2) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(Z_2) \quad\text{et}\quad \overline{Z_2} = \operatorname{Re}(Z_2) - \mathrm{i}\operatorname{Im}(Z_2)$$

et les colonnes réelles Z_1, $\operatorname{Re}(Z_2)$ et $\operatorname{Im}(Z_2)$ suffisent aussi à engendrer les solutions complexes du système $Z' = AZ$: elles forment une base de l'espace complexe des solutions et sont par conséquent linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$. Ces trois colonnes réelles forment donc une base de l'espace des solutions réelles du système (Σ) et l'on peut exprimer[3] la solution générale de celui-ci :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^t + \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)e^{-t/2}\\ y(t) = \sqrt{3}\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{7\pi}{6}\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{7\pi}{6}\right)\right)e^{-t/2}\\ z(t) = -\lambda e^t - \left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{2\pi}{3}\right) + \beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)e^{-t/2}\end{cases} \quad\text{avec}\quad (\lambda,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^3.$$

(b) Parmi les solutions exprimées ci-dessus, les solutions bornées sur $[0\,;+\infty[$ sont celles pour lesquelles $\lambda = 0$. Or

$$\begin{cases} x(0) = \lambda + \alpha\\ y(0) = -\frac{3}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\\ z(0) = -\lambda + \frac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\end{cases}$$

ce qui donne après résolution

$$\lambda = \frac{1}{3}\bigl(2x(0) + y(0) - z(0)\bigr).$$

Les solutions du système (Σ) sont donc bornées sur $[0\,;+\infty[$ si, et seulement si,

$$2x(0) + y(0) - z(0) = 0.$$

Exercice 24 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$$

$\operatorname{Sp}(A) = \{2,3\}$ et

$$E_2(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, E_3(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Pour $Y = P^{-1}X$,

$$X' = AX \iff Y' = DY$$

et

$$Y' = DY \iff Y = \begin{pmatrix}\lambda e^{2t}\\ \mu e^{3t}\end{pmatrix} \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{K}.$$

Finalement

$$X' = AX \iff X(t) = \lambda\begin{pmatrix}e^{2t}\\ e^{2t}\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2e^{3t}\\ e^{3t}\end{pmatrix} \text{ avec } \lambda,\mu\in\mathbb{K}.$$

Exercice 25 : [énoncé]
C'est un système différentiel de taille 2 linéaire à coefficients constant d'équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix}e^t\\ 0\end{pmatrix}.$$

2. On peut aussi rechercher les solutions réelles parmi les solutions complexes en résolvant l'équation $Z = \overline{Z}$.
3. Pour exprimer les parties réelle et imaginaire de Z_2, on a réécrit j^2-1 en factorisant par l'exponentielle imaginaire d'angle moitié : $j^2 - 1 = 2\mathrm{i}e^{2\mathrm{i}\pi/3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}e^{7\mathrm{i}\pi/6}$.

Equation homogène : $X' = AX$.

$\chi_A = (X-1)(X-2)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2\}$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

On a

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$$

et donc

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X.$$

Posons $Y = P^{-1}X$. On a $Y' = P^{-1}X'$ et donc $X' = AX \iff Y' = DY$.

Posons $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$.

$$Y' = DY \iff \begin{cases}y_1' = y_1\\y_2' = 2y_2\end{cases} iff \begin{cases}y_1(t) = \lambda_1\mathrm{e}^t\\y_2(t) = \lambda_2\mathrm{e}^{2t}\end{cases} \text{ avec } \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$X = PY = \begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ donc

$$X' = AX \iff X(t) = \begin{pmatrix}3\lambda_1\mathrm{e}^t + \lambda_2\mathrm{e}^{2t}\\2\lambda_1\mathrm{e}^t + \lambda_2\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}3\mathrm{e}^t\\2\mathrm{e}^t\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$$

$X_1(t) = \begin{pmatrix}3\mathrm{e}^t\\2\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$ définissent un système fondamental de solutions.

Solution particulière :

$X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \lambda_2(t)X_2(t)$ avec λ_1,λ_2 fonctions dérivables.

$$X' = AX + B(t) \iff \lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t)$$

donc

$$X' = AX + B(t) \iff \begin{cases}3\lambda_1'(t)\mathrm{e}^t + \lambda_2'(t)\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^t\\2\lambda_1'(t)\mathrm{e}^t + \lambda_2'(t)\mathrm{e}^{2t} = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda_1'(t) = 1\\\lambda_2'(t) = -2\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$

$\lambda_1(t) = t$ et $\lambda_2(t) = 2\mathrm{e}^{-t}$ conviennent

$X(t) = \begin{pmatrix}(3t+2)\mathrm{e}^t\\(2t+2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$ est solution particulière.

Solution générale :

$$X(t) = \lambda_1\begin{pmatrix}3\mathrm{e}^t\\2\mathrm{e}^t\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(3t+2)\mathrm{e}^t\\(2t+2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

i.e.

$$\begin{cases}x_1(t) = 3\lambda_1\mathrm{e}^t + \lambda_2\mathrm{e}^{2t} + (3t+2)\mathrm{e}^t\\x_2(t) = 2\lambda_1\mathrm{e}^t + \lambda_2\mathrm{e}^{2t} + (2t+2)\mathrm{e}^t\end{cases} \text{ avec } \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 26 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix}1 & 8\\2 & 1\end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^{-3t}\end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{5,-3\}$, $E_5(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

$A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix}2 & -2\\1 & 1\end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}.$$

Pour $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = DY + C(t)$ avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t}\\-\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t}\end{pmatrix}.$$

Après résolution, on obtient

$$Y' = DY + C(t) \iff Y(t) = \begin{pmatrix}\lambda\mathrm{e}^{5t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t}\\\mu\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t}\end{pmatrix}$$

puis

$$X' = AX + B(t) \iff X(t) = \lambda\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{5t}\\\mathrm{e}^{5t}\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\mathrm{e}^{-3t}\\\mathrm{e}^{-3t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t}\\-\frac{1}{8}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t}\end{pmatrix}.$$

On peut aussi procéder par variation des constantes après résolution séparée de l'équation homogène.

Exercice 27 : [énoncé]

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{-1,2,0\}$,

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient
$$X' = AX \iff Y' = DY$$
or
$$Y' = DY \iff Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{-t} \\ \mu \mathrm{e}^{2t} \\ \nu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$
donc
$$X' = AX \iff X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$

Exercice 28 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
$\chi_A(X) = -X^2(X+1)$.
Après triangularisation, on a $A = PTP^{-1}$ pour
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \iff Y' = TY$.
$$Y' = TY \iff Y = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{-t} \\ \mu t + \nu \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$
La solution générale du système est donc
$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 2\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$

Exercice 29 : [énoncé]
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -(X-2)(X^2 - X + 1)$.
La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable.
La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :
$X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de A, complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.
Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de ${}^tA$.
$\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}\, A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \mathrm{Vect}\, {}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation $2x + y - z = 0$ est stable par ${}^tA$.
Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.
Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.
Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff Y' = BY$.
Ceci nous conduit à la résolution suivante :
$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \iff$$
$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} \\ y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$
Et on peut conclure via $X = PY$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) (S) est un système différentiel linéaire homogène de taille 3, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 3.

(b) Posons $m(t) = x(t) + y(t) + z(t)$. On constate $m'(t) = 0$ et donc le point M évolue sur un plan d'équation $x + y + z = a$. Posons $d(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)$. On constate $d'(t) = 0$ et donc le point M évolue sur une sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

(c) Le système s'écrit $X' = AX$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On vérifie $A^3 = -3A$ et on en déduit $A^{2n+1} = (-3)^n A$ et $A^{2n+2} = (-3)A^2$

puis
$$\exp(t.A) = I_n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} A + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n t^{2n+2}}{(2n+2)!} A^2.$$
Ainsi
$$\exp(t.A) = I_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) A + \frac{1}{3}\big(1 - \cos(\sqrt{3}t)\big) A^2$$
et la solution générale du système est
$$X(t) = X_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\big(\sqrt{3}t\big) A X_0 + \frac{1}{3}\Big(1 - \cos\big(\sqrt{3}t\big)\Big) A^2 X_0.$$

Exercice 31 : [énoncé]
Puisque la matrice A n'est pas inversible, son rang est strictement inférieur à n et il existe donc un hyperplan H contenant l'image de A. Soit $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ une équation de cet hyperplan. Puisque les vecteur$X'(t)$ sont des valeurs prises par A, celles-ci appartiennent à l'hyperplan précédent et donc
$$a_1 x_1'(t) + \cdots + a_n x_n'(t) = 0.$$
On en déduit
$$\big(a_1 x_1(t) + \cdots + a_n x_n(t)\big)' = 0$$
et donc
$$a_1 x_1(t) + \cdots + a_n x_n(t) = C^{te}.$$

Exercice 32 : [énoncé]
Le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$.

> *La trace de A et le déterminant de A sont les sommes et les produits des valeurs propres complexes de A : les conditions $\operatorname{tr}(A) < 0$ et $\det(A) > 0$ expriment que ces valeurs propres sont de parties réelles strictement négatives.*

Introduisons le discriminant $\Delta = \big(\operatorname{tr}(A)\big)^2 - 4\det(A)$.
Cas: $\Delta > 0$. La matrice A possède deux valeurs propres réelles distinctes α et β, elle est diagonalisable et l'on peut écrire
$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$
En posant $Y = P^{-1}X$, le système (Σ) équivaut à (Σ'): $Y' = DY$. De plus, si toutes les solutions de (Σ) sont de limite nulle en $+\infty$, il en est de même des solutions de (Σ') et inversement car on passe des unes aux autres en multipliant par P^{-1} ou par P. La matrice D étant diagonale, la résolution de (Σ') est immédiate et l'on obtient la solution générale
$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{\alpha t} \\ \mu e^{\beta t} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
On en déduit que (Σ) est asymptotiquement stable si, et seulement si, les valeurs propres α et β sont strictement négatives. On vérifie alors $\operatorname{tr}(A) = \alpha + \beta < 0$ et $\det(A) = \alpha\beta > 0$. Inversement, si $\det(A) > 0$, les valeurs propres α et β sont de même signe et ce signe commun est strictement négatif lorsque $\operatorname{tr}(A)$ l'est.
Cas: $\Delta = 0$. La matrice A possède une valeur propre réelle double $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)$. En introduisant une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dont la première colonne est vecteur propre de A associé à la valeur propre α, on obtient
$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
où a est un réel [4]. Comme dans le cas précédent, le système (Σ) est asymptotiquement stable si, et seulement si, le système (Σ'): $Y' = TY$ l'est. La solution générale de ce dernier s'exprime
$$Y(t) = \begin{pmatrix} (\lambda + a\mu t) e^{\alpha t} \\ \mu e^{\alpha t} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$
Le système (Σ') est donc asymptotiquement stable si, et seulement si, $\alpha < 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\operatorname{tr}(A) < 0$. La condition $\det(A) > 0$ est quant à elle remplie car $\Delta = 0$.
Cas: $\Delta < 0$. La matrice A possède deux valeurs propres réelles conjuguées $\alpha \pm i\omega$ (avec $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A)$ et $\omega > 0$). La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et l'on peut écrire
$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \alpha - i\omega & 0 \\ 0 & \alpha + i\omega \end{pmatrix}.$$
Considérons alors le système différentiel (Σ'): $Z' = AZ$ d'inconnue Z à valeurs complexes. Si le système (Σ) est asymptotiquement stable, on peut introduire une base de l'espace de ses solutions constituée de colonnes de limite nulle en $+\infty$. Ces colonnes sont aussi solutions de (Σ') et forment une base de l'espace des solutions de (Σ') car elles sont linéairement indépendantes [5]. On en déduit que toutes les

4. Celui-ci peut être nul lorsque la matrice A est diagonalisable, (c'est-à-dire $A = \alpha I_2$).
5. Les deux colonnes solutions introduites sont initialement linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ mais, par étude des parties réelles et imaginaires, on établit qu'elles sont aussi linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

solutions de (Σ') sont de limite nulle en $+\infty$. Inversement, si toutes les solutions du système différentiel (Σ') sont de limite nulle en $+\infty$, c'est le cas en particulier de ses solutions réelles et le système (Σ) est asymptotiquement stable. Enfin, comme lors de l'étude du cas $\Delta > 0$, on établit que les solutions de (Σ') sont de limite nulle en $+\infty$ si, et seulement si, c'est le cas des solutions du système (Σ'') : $Y' = DY$ d'inconnue Y à valeurs complexes. Ces dernières s'expriment

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{(\alpha - \mathrm{i}\omega)t} \\ \mu \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\omega)}t \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

et sont toutes de limites nulles en $+\infty$ si, et seulement si, $\alpha < 0$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\operatorname{tr}(A) < 0$. De nouveau, la condition $\det(A) > 0$ est quant à elle assurément remplie car $\Delta < 0$.

Exercice 33 : [énoncé]
La trace d'une matrice réelle est la somme de ses valeurs propres complexes comptées avec multiplicité. Sachant que celle-ci est strictement positive, on peut affirmer que la matrice A possède au moins une valeur propre réelle strictement positive ou deux valeurs propres complexes conjuguées dont la partie réelle est strictement positive.
Cas: A possède une valeur propre $\alpha > 0$.

> *On détermine un changement de base par lequel l'équation $X' = AX$ fait apparaître une équation $y' = \alpha y$ dont la seule solution bornée sur $\mathbb{R}_+$ est la fonction nulle.*

Le réel α est valeur propre [6] de la transposée de A. En introduisant une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est vecteur propre de A associé à la valeur propre α, on a l'écriture

$${}^tA = QBQ^{-1} \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

et donc

$$A = PTP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = {}^t(Q^{-1}) \quad \text{et} \quad T = {}^tB = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

6. Les matrices A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres.

La fonction X solution de l'équation $X' = AX$ détermine alors $Y = P^{-1}X$ solution de $Y' = TY$ et, tout comme X l'est, cette solution Y est bornée sur $[0\,;+\infty[$. Cependant, le premier élément y de la colonne Y est solution de l'équation différentielle $y' = \alpha y$ et la seule solution bornée sur $[0\,;+\infty[$ de cette équation est la solution nulle. On en déduit que le premier élément de la colonne Y est constant égal à 0. Introduisons alors $E_1 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ la ligne élémentaire dont tous les coefficients sont nuls, sauf le premier qui vaut 1. Pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a $E_1Y(t) = 0$ donc $LX(t) = 0$ pour $L = E_1P^{-1}$ ligne [7] non nulle.
Cas: A possède une valeur propre λ de partie réelle $\alpha > 0$. On suit la même démarche qu'au-dessus et, sachant que la seule solution bornée de l'équation différentielle complexe $z' = \lambda z$ est la fonction nulle, on détermine une ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ non nulle telle que $LX(t) = 0$ pour tout $t \in [0\,;+\infty[$. La ligne complexe L étant non nulle, sa partie réelle ou sa partie imaginaire ne le sont pas et ceci détermine une ligne réelle non nulle qui résout le problème posé.

Exercice 34 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons qu'au contraire un tel α n'existe pas. En prenant $\alpha = 1/p > 0$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, on peut introduire une fonction y_p non nulle, solution de l'équation (E) et s'annulant au moins n fois dans l'intervalle $I_p = [x_0 - 1/p\,; x_0 + 1/p]$.
Notons $\mathcal{S}$ l'espace des solutions de l'équation (E). C'est un espace de dimension finie que l'on peut normer, par exemple, par la norme N définie sur $\mathcal{S}$ par

$$N(f) = \sup_{[x_0-1;x_0+1]} |f| + \sup_{[x_0-1;x_0+1]} |f'| + \cdots + \sup_{[x_0-1;x_0+1]} \left|f^{(n-1)}\right|.$$

Cette norme a pour intérêt de traduire sur le segment $[x_0 - 1\,; x_0 + 1]$ la convergence uniforme d'une suite de fonctions ainsi que de la suite des dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$.
Quitte à considérer la fonction $y_p/N(y_p)$ au lieu de y_p, on peut supposer les fonctions y_p toutes de norme 1. La suite des fonctions (y_p) est alors une suite bornée de l'espace de dimension finie $\mathcal{S}$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente $(y_{\varphi(p)})$. La limite de celle-ci est une fonction y_∞, non nulle et solution de (E). De plus, par construction, la suite de fonctions $(y_{\varphi(p)})$ converge uniformément vers y_∞ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ vers les dérivées respectives de y_∞.
Par les annulations des fonctions $(y_{\varphi(p)})$, on peut introduire une suite $(x_{\varphi(p)})$ convergeant vers x_0 avec $y_{\varphi(p)}(x_{\varphi(p)}) = 0$. Par convergence uniforme, on obtient à la limite $y_\infty(x_0) = 0$.

7. Celle-ci est la transposée de la colonne Q^tE_1 qui correspond au vecteur propre introduit pour définir la première colonne de Q.

Par application du théorème de Rolle, la fonction $y'_{\varphi(p)}$ s'annule au moins $n-2$ fois sur l'intervalle $I_{\varphi(p)}$. On peut reprendre le raisonnement au-dessus et affirmer aussi $y'_\infty(x_0)=0$.
Plus généralement, pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, la fonction $y^{(k)}_{\varphi(p)}$ s'annule au moins $n-k$ fois sur l'intervalle $I_{\varphi(p)}$ ce qui permet d'obtenir $y'_\infty(x_0)=0$.
La fonction y_∞ est alors solution du problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et des conditions initiales

$$y(x_0)=y'(x_0)=\cdots=y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

Or la fonction nulle est la seule solution de ce problème de Cauchy. C'est absurde car y_∞ n'est pas la fonction nulle.